

Détermination de l'espace dextre des manipulateurs parallèles plans avec redondance cinématique

THÈSE PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DES ÉTUDES SUPÉRIEURES ET
DE LA RECHERCHE EN VUE DE L'OBTENTION DE LA MAÎTRISE ÈS
SCIENCES APPLIQUÉES

ANDRÉ GALLANT

Faculté d'ingénierie
Université de Moncton
Mai 2011



Library and Archives
Canada

Published Heritage
Branch

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Direction du
Patrimoine de l'édition

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file *Votre référence*
ISBN: 978-0-494-81190-0
Our file *Notre référence*
ISBN: 978-0-494-81190-0

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.


Canada

Composition du Jury

Président du jury :	Salah Darenfed	Université de Moncton, Département de génie mécanique
Examineur hors programme :	Ilian Bonev	École de technologie supérieure, Département de génie de la production automatisée
Directeur de thèse :	Roger Boudreau	Université de Moncton, Département de génie mécanique
Co-directrice de thèse :	Marise Gallant	Université de Moncton, Département de génie mécanique
Autre membre du jury :	Gabriel LaPlante	Université de Moncton, Département de génie mécanique

Reconnaissance

Je remercie mes directeurs de thèse, le professeur Roger Boudreau et la professeure Marise Gallant, pour leurs conseils et leur remarquable disponibilité. J'aimerais également les remercier pour l'opportunité de faire une maîtrise. Sans cette opportunité, je n'aurais pas su faire un choix de carrière dans le domaine de la recherche.

Je remercie aussi le professeur Roger Boudreau et le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG) pour leur support financier.

À ma famille,

Sommaire

Les manipulateurs parallèles ont des caractéristiques intéressantes pour certaines applications. Ils ont une grande capacité portante relative à leur masse totale et peuvent avoir une précision importante relative aux manipulateurs sériels. Cependant, ils souffrent d'un espace de travail réduit et d'une complexité élevée. Ils ont aussi des singularités à l'intérieur de l'espace de travail. Afin de remédier à certains des inconvénients des manipulateurs parallèles, certains chercheurs ont ajouté de la redondance cinématique.

Dans cette thèse, quatre architectures de manipulateurs parallèles plans avec redondance cinématique sont étudiées, les manipulateurs n -PRRR, n -PRPR, n -RRRR et n -RRPR. Tous ces manipulateurs ont un actionneur redondant ajouté à la base de chacune de leurs pattes. Cet actionneur ajoute alors un degré de liberté de redondance cinématique à chaque patte.

L'objet de ce projet est de développer une méthode efficace pour déterminer l'espace dextre des manipulateurs étudiés. L'espace dextre est défini comme l'espace qu'un manipulateur peut atteindre avec toutes les orientations. Pour les manipulateurs plans, l'espace dextre contient tous les points où l'organe terminal peut compléter une révolution. Une méthode géométrique est explorée dans ce travail car

elle fournit une solution exacte. En plus, la performance d'une méthode géométrique n'est pas reliée à la précision de la solution, ce qui permet de l'utiliser dans un algorithme d'optimisation.

La méthode géométrique présentée dans ce travail peut être résumée en trois étapes générales. La première est de déterminer l'espace dextre de chacune des pattes du manipulateur. Ensuite, l'intersection de l'espace dextre de ces pattes est trouvée afin d'obtenir une représentation géométrique de l'espace dextre du manipulateur. Finalement, à partir de cette représentation géométrique, l'aire de la surface de l'espace dextre est calculée pour quantifier l'espace dextre.

Des exemples de l'application de cette méthode aux manipulateurs étudiés sont présentés. Enfin, il est démontré que la méthode peut être appliquée aux manipulateurs hybrides où les pattes ont n'importe quelle combinaison des architectures présentées.

Summary

Parallel manipulators have interesting properties for certain applications. They benefit from a high payload capacity as well as a relatively high accuracy compared to their serial counterparts. However, they suffer from a reduced workspace that contains internal singularities as well as an inherent complexity in design. In order to reduce certain drawbacks of parallel manipulators, researchers have explored the use of kinematic redundancy.

In this thesis, four kinematically redundant planar parallel manipulator architectures are studied, n -PRRR, n -PRPR, n -RRRR, and n -RRPR manipulators. These architectures all have one actuated joint added to the base of each of their chains. This actuator adds one degree of freedom of kinematic redundancy to each chain.

The purpose of this work is to develop an efficient method to determine the dexterous workspace of the studied manipulators. The dexterous workspace is defined as the area where the end-effector of a manipulator can reach with all orientations. For planar manipulators, the dexterous workspace contains all the points where the end-effector platform can complete a full revolution. A geometric method is chosen for its ability to provide an exact solution. Furthermore, the performance of such a method is independent of the desired precision. Such a method is therefore suitable

for use in an optimization algorithm.

The geometric method presented in this work can be summarized by three steps. First, the dexterous workspace of each chain is determined. Then, the intersection of the dexterous workspace of each chain is found which yields the geometric representation of the dexterous workspace of the manipulator. Finally, the dexterous workspace area is computed from its geometric representation in order to quantify the dexterous workspace.

Examples of the application of the developed method on the studied manipulators are presented. Finally, it is observed that the method can also be applied to hybrid manipulators that have combinations of any of the kinematic chains studied.

Table des matières

Reconnaissance	iii
Sommaire	iv
Summary	vi
Table des matières	viii
Liste des figures	xii
Liste des tableaux	xvi
1 Introduction	1
1.1 Manipulateurs sériels et parallèles	2
1.2 Manipulateurs plans, sphériques et spatiaux	4
1.3 Redondance	5
1.4 Espaces de travail des manipulateurs parallèles plans	6
1.5 Objectifs de la recherche	8
2 État des connaissances	10

2.1	Espace dextre des manipulateurs 3- <u>R</u> RR	10
2.2	Espace dextre des manipulateurs 3- <u>R</u> <u>P</u> R	12
2.3	Détermination de l'aire de l'espace dextre	14
2.4	Redondance cinématique des manipulateurs parallèles plans	15
3	Architectures étudiées	18
3.1	Manipulateurs 3- <u>R</u> RR	19
3.2	Manipulateurs 3- <u>R</u> <u>P</u> R	20
3.3	Manipulateurs n- <u>P</u> RRR	21
3.4	Manipulateurs n- <u>P</u> <u>R</u> <u>P</u> R	23
3.5	Manipulateurs n- <u>R</u> RRR	25
3.6	Manipulateurs n- <u>R</u> <u>R</u> <u>P</u> R	26
4	Méthode géométrique générale du calcul de l'espace dextre des manipulateurs parallèles plans	28
4.1	Étape 1 : Frontière de l'espace dextre de chaque patte	29
4.2	Étape 2 : Intersection des droites et des arcs de la frontière	30
4.2.1	Intersection de deux arcs	31
4.2.2	Intersection d'un arc et d'une droite	33
4.2.3	Intersection de deux droites	37
4.3	Étape 3 : Segmentation des droites et des arcs des frontières	38
4.4	Étape 4 : Frontière de l'espace dextre des manipulateurs	40
4.5	Étape 5 : Aire de l'espace dextre des manipulateurs parallèles	41
5	Espace dextre des pattes	44

5.1	Patte RRR	44
5.1.1	Cas où M_3 n'est pas le membre LF le plus court	48
5.1.2	Cas où M_3 est le membre LF le plus court	50
5.2	Patte RPR	55
5.2.1	Espace dextre de classe 1	56
5.2.2	Espace dextre de classe 2	57
5.2.3	Espace dextre de classe 3	58
5.3	Pattes PRRR et PRPR	60
5.3.1	Espace dextre de type A	61
5.3.2	Espace dextre de type B	66
5.3.3	Espace dextre de type C	68
5.3.4	Espace dextre de type D	69
5.3.5	Espace dextre de type E	71
5.4	Pattes RRRR et RRPR	73
5.4.1	Espaces dextres qui résultent d'une patte RRR ayant un espace dextre de classe 1	75
5.4.2	Espaces dextres qui résultent d'une patte RRR ayant un espace dextre de classe 2	78
5.4.3	Espaces dextres qui résultent d'une patte RRR ayant un espace dextre de classe 3	80
6	Espace dextre des manipulateurs	91
6.1	Espace dextre des manipulateurs n- <u>PRRR</u> et n- <u>PRPR</u>	92
6.1.1	Intersection des frontières et segmentation des arcs et des droites	92

6.1.2	Frontières de l'espace dextre des manipulateurs	93
6.1.3	Aire de l'espace dextre	95
6.1.4	Exemples d'espace dextre des manipulateurs n- <u>PRRR</u> et n- <u>PRPR</u>	96
6.2	Espace dextre des manipulateurs n- <u>RRRR</u> et n- <u>RRPR</u>	100
6.2.1	Intersection des frontières et segmentation des cercles	100
6.2.2	Frontières de l'espace dextre des manipulateurs n- <u>RRRR</u> et n- <u>RRPR</u>	102
6.2.3	Aire de l'espace dextre des manipulateurs n- <u>RRRR</u> et n- <u>RRPR</u>	104
6.2.4	Exemples d'espaces dextres des manipulateurs n- <u>RRRR</u> et n- <u>RRPR</u>	104
Conclusion		108
	Discussion des résultats	108
	Résumé des contributions	109
	Travaux futurs	110

Liste des figures

3.1	Manipulateur parallèle plan 3- <u>R</u> RR	19
3.2	Patte RRR du manipulateur 3- <u>R</u> RR	20
3.3	Manipulateur parallèle plan 3- <u>R</u> PR	21
3.4	Patte RPR du manipulateur 3- <u>R</u> PR	21
3.5	Manipulateur parallèle plan avec redondance cinématique 3- <u>P</u> RRR	22
3.6	Patte avec redondance PRRR	23
3.7	Exemple d'un manipulateur 4- <u>P</u> RRR	23
3.8	Exemple d'un manipulateur 3- <u>P</u> PRR	24
3.9	Exemple d'une patte PRPR	24
3.10	Exemple d'un manipulateur 3- <u>R</u> RRR	25
3.11	Exemple d'une patte d'architecture RRRR	26
3.12	Exemple d'un manipulateur 3- <u>R</u> RRR	27
3.13	Exemple d'une patte d'architecture RRPR	27
4.1	Intersection de deux arcs	31
4.2	Définition des paramètres utilisés pour déterminer l'intersection de deux arcs	32

4.3	Intersection d'un arc et d'une droite	34
4.4	Intersection de deux droites	37
4.5	Points d'intersection d'une droite et d'un arc	39
4.6	Exemples de droites qui font partie de la frontière de l'espace dextre .	43
5.1	Exemple d'une patte RRR	45
5.2	Différentes catégories d'un mécanisme à quatre barres (adapté de (Myszka, 2005)).	47
5.3	Espace dextre d'une patte RRR de classe 1	50
5.4	Espace dextre de pattes de classe 2 et de classe 3	53
5.5	Transition d'une catégorie de mécanisme à quatre barres à une autre qui forme l'espace dextre d'une patte de classe 3	54
5.6	Positions extrêmes et espace dextre d'une patte RPR de classe 1 . . .	57
5.7	Positions extrêmes et espace dextre d'une patte RPR de classe 2 . . .	58
5.8	Espace dextre d'une patte RPR de classe 3	59
5.9	Effet de l'actionneur prismatique redondant sur l'espace dextre d'une patte PRRR ou PRPR	61
5.10	Les cinq types d'espace dextre d'une patte PRRR ou PRPR	62
5.11	Exemple d'espace dextre de type A d'une patte d'espace dextre de classe 2	63
5.12	Exemple d'espace dextre de type A d'une patte d'espace dextre de classe 3	64
5.13	Angles et dimensions d'une patte de type A	66
5.14	Angles et dimensions d'une patte du type B	68

5.15 Exemple d'espace dextre de type C d'une patte d'espace dextre de classe 3	69
5.16 Exemples d'espaces dextre des types D et E	70
5.17 Angles et dimensions d'une patte du type D	71
5.18 Angles et dimensions d'une patte du type E	72
5.19 Pattes avec redondance RRRR et RRPR	74
5.20 Espace dextre d'une patte RRRR de classe 1 et de type 1	76
5.21 Espace dextre d'une patte RRRR de classe 1 et de type 2	77
5.22 Espace dextre d'une patte RRRR de classe 2 et de type 2	79
5.23 Espace dextre d'une patte RRRR de classe 2 et de type 1	79
5.24 Espace dextre d'une patte RRRR de classe 2 et de type 2	80
5.25 Les deux parties de l'espace dextre de classe 3	81
5.26 Espace dextre d'une patte RRRR de classe 3 et de type 3	82
5.27 Espace dextre de type 1 d'une patte RRRR de classe 3-1	84
5.28 Espace dextre de type 2 d'une patte RRRR de classe 3-1	85
5.29 Espace dextre de type 1 d'une patte RRRR de classe 3-1	86
5.30 Espace dextre de type 4 d'une patte RRRR de classe 3-2	88
5.31 Espace dextre de type 2 d'une patte RRRR de classe 3-2	89
6.1 Régions qui définissent l'espace dextre d'une patte PRRR ou PRPR .	94
6.2 Exemple d'un manipulateur 3- <u>PRRR</u>	96
6.3 Espace dextre de l'exemple d'un manipulateur 3- <u>PRRR</u>	98
6.4 Exemple d'un manipulateur 4- <u>PRRR</u>	99
6.5 Espace dextre de l'exemple d'un manipulateur 4- <u>PRRR</u>	99

6.6	Points d'intersection de deux cercles	101
6.7	Segmentation d'un cercle	102
6.8	Manipulateur 3- <u>RRRR</u>	105
6.9	Espace dextre du manipulateur 3- <u>RRRR</u> de la figure 6.8	106
6.10	Manipulateur 2- <u>RRRR</u> -2- <u>RRPR</u>	106
6.11	Espace dextre du manipulateur 2- <u>RRRR</u> -2- <u>RRPR</u> de la figure 6.10 . .	107

Liste des tableaux

5.1	Catégories de mécanismes à quatre barres	46
5.2	Dimensions et rayons des pattes des figures 5.3 et 5.4	53
5.3	Conditions pour chaque classe d'espace dextre	54
5.4	Classes résultantes des combinaisons des inégalités A et B	56
5.5	Conditions pour chaque type d'espace dextre	73
5.6	Conditions et rayons des types d'espace dextre provenant de classe 1 .	77
5.7	Conditions et rayons de tous les types d'espace dextre provenant de classe 2	81
5.8	Conditions et rayons de tous les types d'espace dextre provenant de pattes de classe 3-1	87
5.9	Conditions et rayons de tous les types d'espace dextre provenant des pattes de classe 3-2	90
6.1	Dimensions de l'exemple d'un manipulateur 3- <u>PRRR</u>	97
6.2	Dimensions de l'exemple d'un manipulateur 4- <u>PRRR</u>	98
6.3	Dimensions du manipulateur 3- <u>RRRR</u> de la figure 6.8	105
6.4	Dimensions du manipulateur 2- <u>RRRR</u> -2- <u>RRPR</u> de la figure 6.10 . . .	107

Chapitre 1

Introduction

Les manipulateurs sont des mécanismes qui servent à manipuler des objets. Ceux-ci sont souvent utilisés dans l'industrie afin de faire des tâches répétitives, dangereuses ou dans un environnement néfaste aux humains. Par contre, des manipulateurs ne peuvent pas encore complètement remplacer des travailleurs. Par exemple, pour des tâches où une inspection complexe est nécessaire, les humains sont encore plus performants.

Il existe plusieurs architectures de manipulateurs qui ont chacun des avantages et des inconvénients. Dans ce premier chapitre, une introduction aux différents types de manipulateurs est donnée et une brève explication de certains critères de conception est fournie. L'état des connaissances du domaine étudié dans ce travail est présenté au prochain chapitre. Par la suite, les architectures des manipulateurs étudiés sont présentées suivies par un chapitre décrivant une méthode générale pour la détermination de l'espace dextre des manipulateurs parallèles plans. La méthode pour la détermination de l'espace dextre de chaque patte des manipulateurs étudiés

est ensuite présentée et dans le chapitre suivant, la méthode pour déterminer l'espace dextre des manipulateurs est détaillée. Une conclusion présente une discussion des résultats de cette étude.

1.1 Manipulateurs sériels et parallèles

Historiquement, les manipulateurs étaient basés sur le bras humain où chaque membre est relié au prochain par une articulation actionnée. Les membres et les articulations sont tous enchaînés en série reliant la base du bras (équivalent au corps d'un humain) à un organe terminal qui manipule directement les objets (équivalent aux doigts de la main humaine). Ces manipulateurs ont une architecture dite sérielle. Ces manipulateurs ont un espace de travail relativement grand et sont plus faciles à piloter.

Un inconvénient des manipulateurs sériels est qu'ils ont une masse très importante. Puisqu'il y a un moteur dans chaque articulation, une grande partie de la puissance fournie par les actionneurs est utilisée pour entraîner la masse des actionneurs plus près de l'organe terminal. Pour cette raison, les manipulateurs sériels ont une inertie très importante qui peut causer des pertes de précision et de rapidité. Afin de remédier à ces inconvénients, les chercheurs ont introduit des manipulateurs d'architecture de type parallèle.

Une étude détaillée de l'origine des manipulateurs parallèles est présentée par Bonev (2003). Plusieurs chercheurs attribuent l'origine des manipulateurs parallèles à Gough et Stewart. Par contre, le travail de Bonev indique que certains individus méconnus ont joué un rôle important dans l'invention des manipulateurs parallèles.

Il semble que le premier manipulateur parallèle a été conçu par James E. Gwinnett qui a obtenu un brevet en 1931 sur ce manipulateur parallèle pour la simulation de mouvements pour le divertissement des gens. Cependant, il n'est pas clair si ce manipulateur a été construit ou non. Il paraît alors que le premier manipulateur à être construit a été conçu par Willard Pollard Jr. en 1934. Ce manipulateur était utilisé pour appliquer de la peinture par jet.

En 1947, Eric Gough, employé chez Dunlop Rubber Company en Angleterre, a inventé le manipulateur parallèle à six degrés de liberté (DDL) avec actionneurs prismatiques qui est bien connu (Gough, 1962). Son manipulateur a été conçu pour soumettre des pneus à des charges complexes pour vérifier leur performance. Gough semble être le premier à concevoir ce type de manipulateur. Par contre, dans la communauté scientifique, Stewart est souvent associé avec ce type de manipulateur dû à son article scientifique publié en 1965 (Stewart, 1965). Ce manipulateur était conçu pour la simulation de vol. Depuis ce temps, la plate-forme de Gough est souvent nommée la plate-forme de Stewart.

En 1964, Klaus Cappel a demandé un brevet aux États-Unis pour un manipulateur parallèle à six DDL. Il a développé ce manipulateur sans connaissance du manipulateur de Gough et avant l'article de Stewart. Cependant, cette contribution est généralement ignorée par la communauté scientifique.

Les architectures parallèles permettent de fixer les actionneurs, ou au moins les actionneurs les plus lourds, à la base de plusieurs chaînes cinématiques. Ceux-ci sont nommés manipulateurs parallèles car plusieurs chaînes cinématiques relient la base du manipulateur et une plate-forme (là où l'outil est fixé) en parallèle. Ceci réduit grandement la masse et l'inertie du système, ce qui engendre des augmentations de

performance et permet une rapidité relativement grande (Merlet, 1997). Ces manipulateurs sont souvent utilisés pour des opérations de transfert (*pick and place*) où il s'agit simplement de prendre un objet, de le déplacer et de le poser. Ces tâches ont souvent besoin d'être accomplies avec une rapidité très élevée. Dû à la capacité d'accélération relativement grande et à la précision potentielle des manipulateurs parallèles, ils peuvent être très efficaces pour ce type de tâche. Une architecture parallèle permet aussi d'augmenter la capacité portante relative à la masse du manipulateur.

Cependant, les manipulateurs parallèles ont aussi quelques inconvénients. Leur espace de travail est restreint dû au fait que plusieurs chaînes cinématiques ajoutent des contraintes au mouvement. En plus, des types de singularité qui ne sont pas possibles avec les architectures sérielles se présentent dans l'espace de travail de plusieurs architectures parallèles. Le modèle géométrique direct est aussi plus compliqué et n'a normalement pas de solution explicite, par contre le modèle géométrique inverse est souvent plus simple avec une ou quelques solutions explicites.

1.2 Manipulateurs plans, sphériques et spatiaux

En plus de la distinction des manipulateurs parallèles et sériels, ceux-ci peuvent être divisés en manipulateurs plans, sphériques et spatiaux. La différence entre ces types est surtout leur type de DDL.

Les manipulateurs plans sont des manipulateurs qui se déplacent dans un plan (voir par exemple, Bajpai et Roth (1986), Sefrioui et Gosselin (1992) et Merlet (1996a)). Ils ont alors deux DDL de translation (x,y , par exemple) et un DDL pour orienter l'outil dans le plan. L'axe d'orientation des manipulateurs plans est donc

perpendiculaire aux directions de translation. Des manipulateurs plans ont besoin de trois actionneurs pour contrôler les trois DDL.

Les manipulateurs sphériques ont aussi trois DDL, mais en orientation, c'est-à-dire, de tels manipulateurs peuvent orienter un objet en trois dimensions (voir par exemple, Gosselin et Angeles (1989), Gosselin *et al.* (1996) et Kong et Gosselin (2004)). Encore une fois, trois actionneurs sont nécessaires pour contrôler les trois DDL de mouvement.

Finalement, les manipulateurs spatiaux sont des manipulateurs qui peuvent positionner et orienter l'organe terminal en trois dimensions (voir par exemple, Hunt (1983) et Fichter (1986)). Ils ont alors jusqu'à six DDL de mouvement et ont donc besoin de jusqu'à six actionneurs. La majorité des manipulateurs sériels à utilisation générale sont de ce type. Ceux-ci sont les plus proches du modèle du bras humain.

Quelques autres types de manipulateurs existent, par exemple, des manipulateurs plans avec un actionneur prismatique ajouté à l'outil pour permettre une translation sur l'axe perpendiculaire au plan. Dans ce travail, les manipulateurs parallèles plans sont les seuls étudiés. Par contre, les manipulateurs étudiés ont plus de trois actionneurs et sont dits redondants.

1.3 Redondance

Il existe généralement deux types de redondance pour les manipulateurs parallèles (Zanganeh et Angeles, 1994). Premièrement, la redondance d'actionnement est lorsqu'une articulation normalement passive est convertie en articulation actionnée (voir par exemple, Kock et Schumacher (1998), Nokleby *et al.* (2005) et Nokleby (2005)).

Par exemple, le manipulateur 3-RRR¹ aurait une redondance d'actionnement si les pattes avaient deux actionneurs (3-RRR). Ce type de redondance aide à éviter certaines singularités à l'intérieur de l'espace de travail. Ce type de redondance offre aussi une petite capacité d'éviter des obstacles.

Le deuxième type de redondance est la redondance cinématique (Wang et Gosselin, 2004). Ce type de redondance est présent lorsqu'une ou plusieurs articulations actionnées sont ajoutées à une ou plusieurs des pattes d'un manipulateur. Par exemple, de la redondance cinématique ajoutée au manipulateur 3-RRR pourrait créer un manipulateur 3-PRRR où un actionneur prismatique est ajouté à la base de chaque chaîne cinématique. Ce type de redondance peut aussi être vu dans des manipulateurs sériels afin d'ajouter la capacité d'éviter des obstacles. Avec ce type de redondance, il est souvent possible de complètement éviter les singularités à l'intérieur de l'espace de travail. Le modèle géométrique inverse a une infinité de solutions. Les manipulateurs étudiés dans ce travail possèdent ce deuxième type de redondance.

1.4 Espaces de travail des manipulateurs parallèles plans

L'espace de travail est l'espace dans lequel un manipulateur peut opérer. Il existe plusieurs sous-ensembles de l'espace de travail qui permettent d'effectuer différents

1. La notation 3-RRR indique que le manipulateur a trois chaînes cinématiques, chacune composée d'un actionneur rotoïde et deux articulations rotoïdes passives. Dans cette notation, R signifie un actionneur rotoïde, R signifie une articulation rotoïde passive et P indique un actionneur prismatique.

types de tâche. Dans cette section, les différents types d'espace de travail sont présentés en considérant les manipulateurs parallèles plans. Tous les types d'espace de travail sont alors des zones dans le plan de mouvement du manipulateur.

L'espace atteignable des manipulateurs est l'espace de travail le plus grand et est défini comme l'espace que l'organe terminal d'un manipulateur peut atteindre avec au moins une orientation. Ce type d'espace de travail est souvent très utile pour les manipulateurs qui font des opérations de transfert lorsque les objets peuvent être pris de n'importe quel angle.

L'espace à orientation constante est l'espace que l'organe terminal peut atteindre avec une orientation spécifique. Ce type d'espace de travail est important lorsque les objets à manipuler doivent toujours être orientés dans une orientation fixe.

Parfois, il est utile de visualiser l'espace de travail en trois dimensions. Avec l'espace de travail à orientation constante, il est possible de déterminer l'espace de travail en fonction de l'orientation de l'organe terminal. En discrétisant l'orientation de l'organe terminal, il est possible d'obtenir une représentation tridimensionnelle de l'espace de travail en fonction de l'orientation.

L'espace de travail dans une gamme d'orientations est l'espace dans lequel chaque point peut être atteint avec toutes les orientations dans une certaine gamme. Un sous-ensemble de ce type d'espace de travail est l'espace dextre qui est l'espace de travail où toutes les orientations sont possibles. Pour les manipulateurs parallèles plans, c'est l'espace de travail dans lequel la plate-forme de l'organe terminal peut compléter une pleine révolution.

1.5 Objectifs de la recherche

L'objectif de ce travail est de développer une méthode efficace pour la détermination de l'espace dextre des manipulateurs parallèles plans avec redondance cinématique. Dû à la complexité de l'architecture de tels manipulateurs, la détermination de leur espace dextre n'est pas triviale.

Il existe quelques méthodes pour l'obtention de l'espace dextre des manipulateurs parallèles plans. En particulier, une méthode par discrétisation est souvent utilisée pour sa simplicité. Afin d'employer une telle méthode à la détermination de l'espace dextre, il suffit d'avoir un test pour vérifier si un point dans le plan est dans l'espace dextre ou non. Ensuite il suffit de diviser un espace suffisamment grand en plusieurs points et de vérifier chacun pour leur inclusion dans l'espace dextre. Cependant, cette méthode ne fournit pas une solution exacte et son efficacité est inversement proportionnelle à la précision de la solution qu'elle fournit (nombre de points pour la discrétisation). Les méthodes par discrétisation sont choisies lorsque l'espace dextre est à déterminer une ou quelques fois. Par contre, de telles méthodes ne sont pas adaptées pour des applications où l'espace dextre est utilisé comme critère d'évaluation dans un algorithme d'optimisation.

Pour cette raison, une méthode géométrique pouvant donner une solution exacte dans un temps de calcul relativement court augmente l'efficacité de la conception des manipulateurs parallèles plans. En plus, les méthodes géométriques sont généralement très visuelles et par conséquent, il est plus facile de comprendre le fonctionnement de la méthode car chaque étape est basée sur l'architecture des manipulateurs étudiés. Par contre, le développement d'une méthode géométrique pour

les manipulateurs parallèles plans avec redondance cinématique est plus difficile que pour les manipulateurs non-redondants.

La méthode proposée se base sur la détermination de l'espace dextre de la partie sans redondance de chaque patte. Ensuite elle ajoute l'effet des actionneurs redondants et détermine l'intersection de l'espace dextre de chaque patte. Finalement, avec la représentation géométrique de l'espace dextre du manipulateur, elle utilise le théorème de la divergence de Gauss pour calculer l'aire de l'espace dextre. Cette dernière est une valeur scalaire et peut facilement être utilisée comme critère d'optimisation.

Chapitre 2

État des connaissances

2.1 Espace dextre des manipulateurs 3-RRR

Les manipulateurs parallèles plans ont été étudiés à plusieurs reprises dans les derniers 25 ans. Une architecture connue est le manipulateur parallèle plan à trois DDL : le 3-RRR. Puisque l'espace dextre est un critère important dans la conception des manipulateurs parallèles plans, plusieurs chercheurs se sont penchés sur sa détermination.

Gosselin et Angeles (1988) ont étudié l'optimisation des manipulateurs 3-RRR symétriques en se basant sur quatre critères. Ces critères sont la symétrie, l'existence d'un espace dextre, la maximisation de l'espace de travail et l'isotropie de la matrice Jacobienne du manipulateur. Les auteurs ont constaté les frontières de l'espace à orientation constante de chaque patte comme le lieu géométrique où les liens proximal et distal sont complètement repliés ou allongés. Puisque le manipulateur considéré est symétrique, ils ont identifié que l'espace dextre de ces manipulateurs est équivalent

à l'espace avec une orientation de π rad. La méthode pour trouver l'espace dextre fonctionne bien pour des manipulateurs symétriques mais est difficilement appliquée aux manipulateurs de géométrie générale.

Kumar (1992) a utilisé les torseurs pour identifier l'espace atteignable ainsi que l'espace dextre des manipulateurs parallèles. Cette méthode trouve les lieux géométriques (courbes) qui correspondent aux configurations où le torseur réciproque à l'organe terminal a un pas nul. Ensuite, la méthode détermine lesquelles de ces courbes font partie de la frontière de l'espace de travail. Pour ceci, elle teste un point de chaque côté de la courbe. Si un point est dans l'espace de travail (ou dextre) et l'autre ne l'est pas, la courbe en question fait partie de la frontière de l'espace de travail (ou dextre). L'identification des lieux géométriques est compliquée et n'est pas très visuelle. Dans cet article, l'auteur définit aussi l'espace dextre contrôlable comme l'espace que l'organe terminal peut atteindre et à l'intérieur duquel il peut tourner de 2π rad sans atteindre de configurations singulières. Ce sous-ensemble de l'espace dextre est très petit et n'existe que dans des conditions spécifiques.

Pennock et Kassner (1993) ont fait l'étude de l'espace de travail en fonction de l'orientation de l'organe terminal (espace à orientation constante). Ils ont aussi utilisé une méthode géométrique pour trouver l'espace dextre des manipulateurs 3-RRR non-symétriques. Cette méthode trouve l'espace dextre de chaque patte en se basant sur les positions extrêmes des liens distal et proximal. La méthode fait ensuite l'intersection de l'espace dextre de toutes les pattes. Par contre, l'espace dextre de chaque patte est défini par un maximum de deux cercles concentriques et ignore la possibilité d'un espace dextre à la base de la patte.

Feng, Yong-Sheng et Zhi-Hui (1996) ont fait l'analyse de la mobilité des manipu-

lateurs 3-RRR symétriques. En utilisant le critère de Grashof pour les mécanismes à quatre barres, ils ont identifié les paramètres cinématiques des manipulateurs 3-RRR. Cette étude aide à comprendre l'analogie des mécanismes à quatre barres dans le contexte des manipulateurs 3-RRR.

Zhaohui et Zhonghe (2004) ont identifié un troisième cercle concentrique de l'espace dextre de chaque patte des manipulateurs 3-RRR. Ils ont utilisé l'analogie du mécanisme à quatre barres et ont identifié les catégories de ce mécanisme où la plateforme de l'organe terminal est une manivelle. Toutes les configurations où l'organe terminal est une manivelle sont dans l'espace dextre de la patte. Ils ont aussi trouvé l'intersection de l'espace dextre des pattes d'un manipulateur 3-RRR symétrique avec une méthode géométrique pour des manipulateurs symétriques.

Une liste complète des mécanismes à quatre barres utile pour la détermination de l'espace dextre des manipulateurs 3-RRR peut être trouvée dans la plupart des manuels portant sur des mécanismes (voir par exemple Myszka (2005)). Cinq catégories de mécanismes sont identifiées qui ont chacune des caractéristiques particulières. Certaines catégories ont des membres qui peuvent compléter une révolution et certaines n'en ont pas. Ces catégories aident à déterminer quelles positions sont dans l'espace dextre de chaque patte.

2.2 Espace dextre des manipulateurs 3-RPR

Les manipulateurs 3-RPR sont des manipulateurs parallèles plans qui ont souvent été étudiés dans la littérature. Puisqu'ils ont trois pattes d'architecture RPR, certaines études se basent sur ces architectures sérielles.

Rastegar et Deravi (1987a) ont identifié des régions dans l'espace de travail de différentes architectures de manipulateurs sériels avec des articulations de type rotoïde. Dans ces régions, le nombre de configurations possibles d'un manipulateur diffère, c'est-à-dire que le nombre de modes d'assemblage qui permettent à l'organe terminal d'atteindre les positions et orientations varie d'une région à l'autre. Dans leur travail, les auteurs ont déterminé que le nombre de modes d'assemblage possibles pour chaque position et orientation est toujours un nombre pair. Ils considèrent que les frontières de chaque région sont là où il y a un nombre différent de configurations possibles de chaque côté. En utilisant ce principe, ils ont aussi identifié que l'espace à orientation constante est une région dont les frontières sont les endroits où le nombre de configurations possibles change de deux à zéro. Les auteurs ont aussi appliqué cette méthode au manipulateur RPR plan (Rastegar et Deravi, 1987b). Dans ce travail, ils ont étudié les effets des limites articulaires sur l'espace de travail.

Gosselin et Jean (1996) ont étudié l'espace de travail des manipulateurs 3-RPR. Ils ont aussi étudié les effets des limites articulaires des articulations prismatiques et des articulations rotoïdes passives.

Merlet, Gosselin et Mouly (1998) ont étudié plusieurs types d'espace de travail des manipulateurs 3-RPR incluant l'espace dextre. Ils se sont basés sur les positions extrêmes des articulations prismatiques pour identifier une région annulaire qui définit l'espace dextre de chaque patte. L'espace dextre du manipulateur est l'intersection de l'espace dextre de chaque patte et un exemple a été présenté. Cette méthode peut être adaptée pour prendre en compte des limites articulaires des articulations rotoïdes.

Murray et Hanchak (2000) ont étudié l'espace de travail de plusieurs manipu-

lateurs parallèles plans à trois DDL. En effet, ils ont pris des manipulateurs avec une combinaison des pattes RPR, PRR et RRR. Ils trouvent l'espace de travail de chaque patte et l'utilisent comme critère pour optimiser les dimensions de chacune des pattes de tels manipulateurs.

Hay et Snyman (2005) ont développé une méthode pour déterminer l'espace dextre basée sur leur *Chord Method*. Cette méthode utilise une optimisation de trois niveaux pour trouver un point sur la frontière de l'espace dextre. Ensuite la *Chord Method* est employée pour trouver le prochain point sur la frontière. De cette façon, la méthode proposée dans ce travail est une méthode de discrétisation de la frontière. Elle requiert aussi de solutionner quatre problèmes d'optimisation pour identifier chaque point de la frontière de l'espace dextre.

2.3 Détermination de l'aire de l'espace dextre

Les méthodes géométriques vont généralement déterminer les frontières de l'espace dextre. Afin de quantifier l'espace dextre pour pouvoir les comparer, des méthodes ont été trouvées pour calculer l'aire de la zone de l'espace dextre à partir de la frontière.

Gosselin et Angeles (1988) ont utilisé le théorème de la divergence de Gauss pour obtenir l'aire en intégrant le long de la frontière. Dans leur travail, les frontières des zones sont toutes des arcs. En réalité, les frontières de l'espace de travail sont définies par des arcs et des droites, mais les droites peuvent être définies comme des arcs de rayon infini. Toutes les composantes des frontières dans ce travail sont donc des arcs. Ils ont ensuite déterminé des expressions explicites pour calculer la contribution de

chaque arc à l'aire.

Gosselin (1990) a aussi utilisé le théorème de la divergence de Gauss pour calculer l'espace de travail tridimensionnel des manipulateurs à 6 DDL.

Dans le travail de Gosselin et Martin (1996), le théorème de la divergence de Gauss a été utilisé pour déterminer l'aire de l'espace de travail. Dans ce travail, ils ont appliqué le théorème aux arcs ainsi qu'aux droites de la frontière de l'espace de travail. Ils ont aussi déterminé des expressions explicites pour calculer la contribution de chaque droite en plus de celles des arcs. Cependant, les expressions pour les droites ne sont valables que pour des droites normales aux arcs de la frontière, c'est-à-dire des droites qui vont vers le centre d'un des arcs des frontières.

2.4 Redondance cinématique des manipulateurs parallèles plans

Les manipulateurs parallèles ont plusieurs avantages mais ils ont aussi quelques inconvénients. Par exemple, ils ont généralement un espace de travail restreint ainsi que des singularités à l'intérieur de l'espace dextre. Afin de réduire ces inconvénients, certains chercheurs ont ajouté de la redondance aux manipulateurs parallèles.

Merlet (1996b) a étudié les effets de la redondance sur les manipulateurs parallèles. Premièrement, il a démontré que différents types de redondance appliqués aux manipulateurs parallèles peuvent faire en sorte que le modèle géométrique direct a une solution unique. En plus, il est possible de réduire la vitesse et la force aux articulations pour appliquer un mouvement à l'organe terminal. L'auteur a aussi

montré que les singularités à l'intérieur de l'espace de travail peuvent être réduites.

Wang et Gosselin (2004) ont fait l'analyse cinématique de différents manipulateurs parallèles avec un (1) DDL de redondance cinématique. Les manipulateurs étudiés étaient un manipulateur parallèle plan à 4 DDL, un manipulateur parallèle sphérique à 4 DDL et un manipulateur spatial à 7 DDL. Ils ont étudié les courbes de singularité de ces manipulateurs et ils les ont comparées aux courbes de singularité des manipulateurs non-redondants. Ils ont démontré que les singularités des manipulateurs redondants sont significativement réduites.

Ebrahimi, Carretero et Boudreau (2008a) ont étudié les architectures de manipulateurs parallèles plan avec redondance cinématique de type 3-PRRR. Ces manipulateurs ont une articulation actionnée ajoutée à chaque patte et ont un total de 6 DDL du point de vue actionnement. Ils ont montré que l'ajout de ces articulations redondantes augmente significativement l'espace dextre et permet d'éviter les singularités dans l'espace de travail. L'espace dextre de ces manipulateurs a été trouvé à l'aide d'une méthode par discrétisation. Une telle méthode est relativement inefficace et ne donne pas une solution exacte de l'espace dextre.

Ebrahimi, Carretero et Boudreau (2008b) ont aussi fait l'analyse cinématique d'un manipulateur parallèle plan avec redondance cinématique d'architecture 3-RPRR. Cette architecture a une articulation actionnée du type rotoïde ajoutée à la base de chaque patte et a donc trois DDL de redondance cinématique. Dans ce travail, ils ont déterminé l'espace dextre avec une méthode géométrique. La méthode utilisée était valide pour les dimensions spécifiées mais n'était pas générale. Ils ont aussi démontré qu'avec une telle architecture, il est possible d'éviter complètement les singularités à l'intérieur de l'espace de travail.

Les architectures étudiées dans le présent travail correspondent à des manipulateurs avec un DDL de redondance cinématique ajouté à la base de chaque patte. Deux types de redondance cinématique sont étudiés : le cas où une articulation rotoïde actionnée est ajoutée à la base de chaque patte et le cas où un actionneur prismatique est ajouté à la base de chaque patte. Les manipulateurs non-redondants auxquels ces actionneurs redondants sont ajoutés sont les 3-RRR et 3-RPR. Les architectures étudiées sont alors les n-PRRR, n-PRPR, n-RRRR et n-RRPR. Cette thèse présente une méthode géométrique générale qui donne une solution exacte de l'espace dextre de ces manipulateurs. La méthode s'applique également à des manipulateurs hybrides de combinaisons de pattes ayant les architectures étudiées.

Chapitre 3

Architectures étudiées

Dans ce chapitre, les architectures des manipulateurs étudiés sont présentées. Les manipulateurs étudiés sont tous des manipulateurs avec redondance cinématique et sont basés sur des manipulateurs non-redondants. Ceux-ci sont le manipulateur $3\text{-}\underline{R}RR$ et le manipulateur $3\text{-}R\underline{P}R$, des manipulateurs connus dans la littérature. Les premières deux sections de ce chapitre présentent ces deux manipulateurs non-redondants. Ensuite, il y a deux types de redondance cinématique étudiés dans ce travail, la redondance cinématique avec une articulation rotoïde active et la redondance cinématique avec une articulation prismatique active. Ces deux types de redondance cinématique appliqués aux manipulateurs non-redondants forment les quatre architectures redondantes étudiées dans ce travail. Ces manipulateurs sont les manipulateurs $n\text{-}\underline{P}RRR$, $n\text{-}\underline{P}R\underline{P}R$, $n\text{-}\underline{R}RRR$ et $n\text{-}R\underline{R}\underline{P}R$ et sont présentés dans ce chapitre.

3.1 Manipulateurs 3-RRR

Le manipulateur 3-RRR est un manipulateur parallèle plan connu dans la littérature. Il est composé de trois pattes sérielles qui relient la base du manipulateur à son organe terminal. Un exemple de ce type de manipulateur est illustré à la figure 3.1. Dans les figures qui suivent, les actionneurs rotoïdes sont représentés par un \bullet et les articulation rotoïdes passives sont représentées par un \circ .

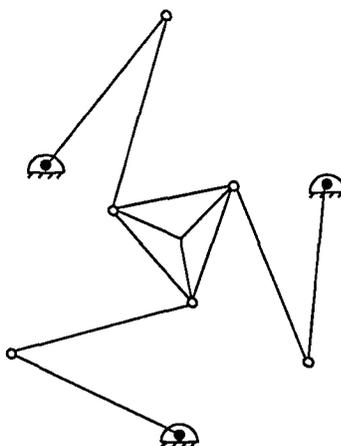


FIGURE 3.1 – Manipulateur parallèle plan 3-RRR

Chaque patte de ce manipulateur est composée de trois rotoïdes, dont celle fixée à la base est actionnée. Toutes les articulations sont reliées par un corps rigide (membre). Un exemple de patte RRR est illustré à la figure 3.2.

Dans la figure 3.2(a), M_1 , M_2 et M_3 sont les membres qui relient les articulations et l'organe terminal en ordre de la base de la patte vers l'organe terminal. Le point A est le point où la patte est fixée à la base, D est la position de l'organe terminal et B et C sont les positions des deux articulations passives. Il est à noter que lorsque la patte change de posture, les points B , C et D se déplacent tandis que le point A

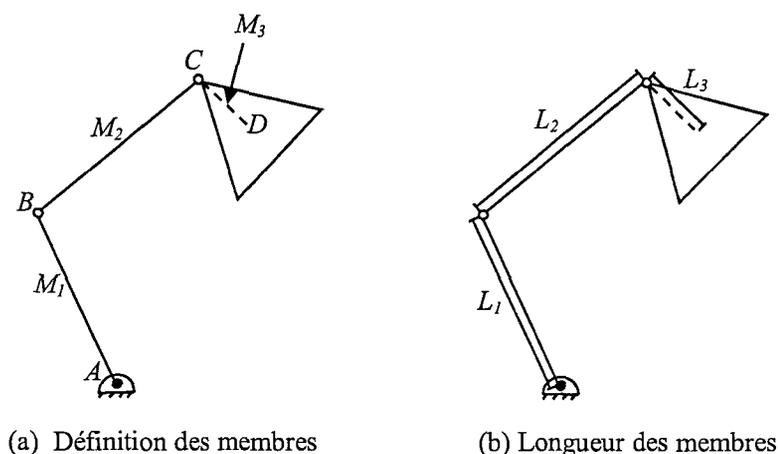


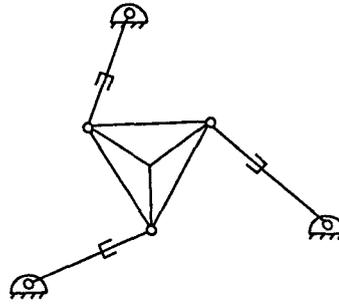
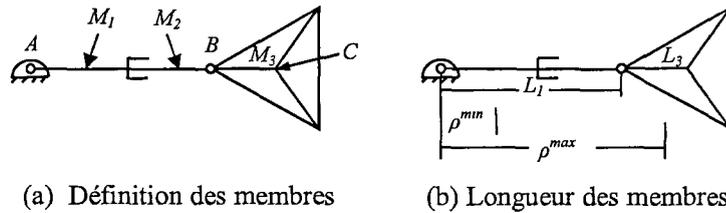
FIGURE 3.2 – Patte RRR du manipulateur 3-RRR

est fixe. Dans la figure 3.2(b), L_1 , L_2 et L_3 sont les longueurs des membres M_1 , M_2 et M_3 , respectivement.

3.2 Manipulateurs 3-RPR

Le manipulateur 3-RPR est composé de trois pattes qui relient la base du manipulateur à son organe terminal. La figure 3.3 illustre un exemple de ce type de manipulateur parallèle plan. Chaque patte de ce manipulateur est composée d'une rotoïde passive, suivie d'un actionneur prismatique et d'une autre rotoïde passive. Un exemple d'une patte RPR est illustré à la figure 3.4.

Dans la figure 3.4(a), M_1 et M_2 sont les membres qui représentent les parties fixe et mobile de l'actionneur prismatique, M_3 est le membre qui représente la plateforme de l'organe terminal pour cette patte, A est la position de la rotoïde fixée à la base de la patte, B est la position de la deuxième rotoïde et C est la position de l'organe terminal. Encore une fois, le point A est fixe, alors que les points B et C

FIGURE 3.3 – Manipulateur parallèle plan 3-RPR

(a) Définition des membres

(b) Longueur des membres

FIGURE 3.4 – Patte RPR du manipulateur 3-RPR

se déplacent lorsque la posture de la patte change. Dans la figure 3.4(b), L_1 est la longueur actuelle de l'actionneur prismatique et L_3 est la longueur du membre M_3 . Aussi dans cette figure, ρ^{min} est la longueur minimale de l'actionneur prismatique et ρ^{max} est sa longueur maximale.

3.3 Manipulateurs n-PRRR

Le premier type de redondance cinématique est celui obtenu en ajoutant un actionneur prismatique à la base de chaque patte. Dans cette section, un manipulateur basé sur le manipulateur 3-RRR avec ce type de redondance cinématique est présenté. La figure 3.5 montre un exemple d'un manipulateur 3-PRRR.

Le manipulateur illustré à la figure 3.5 est un manipulateur avec trois pattes de

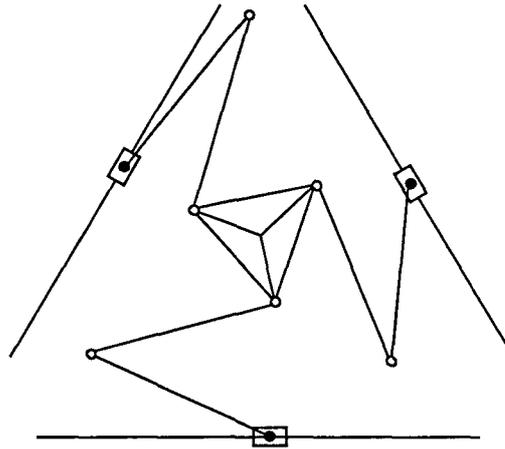


FIGURE 3.5 – Manipulateur parallèle plan avec redondance cinématique 3-PRRR

type PRRR. Chaque patte est composée d'un actionneur prismatique à la base de la patte, d'un actionneur rotoïde attaché à cet actionneur et de deux articulations rotoïdes passives qui relient la base de la patte à l'organe terminal. Un exemple de ce type de patte est illustré à la figure 3.6. Dans cette figure, E et F sont les positions des limites de l'articulation prismatique, L_4 est la course de l'articulation prismatique, c'est-à-dire, la distance entre le point E et le point F . Les autres dimensions de la patte PRRR sont identiques à celles de la patte RRR présentée dans la section 3.1.

Le manipulateur 3-PRRR montré à la figure 3.5 n'a que trois pattes et est symétrique. Par contre, comme il sera démontré dans ce travail, l'espace dextre de manipulateurs n -PRRR avec des configurations aléatoires peut être obtenu de façon similaire aux manipulateurs 3-PRRR symétriques. Un exemple d'un manipulateur 4-PRRR est illustré à la figure 3.7.

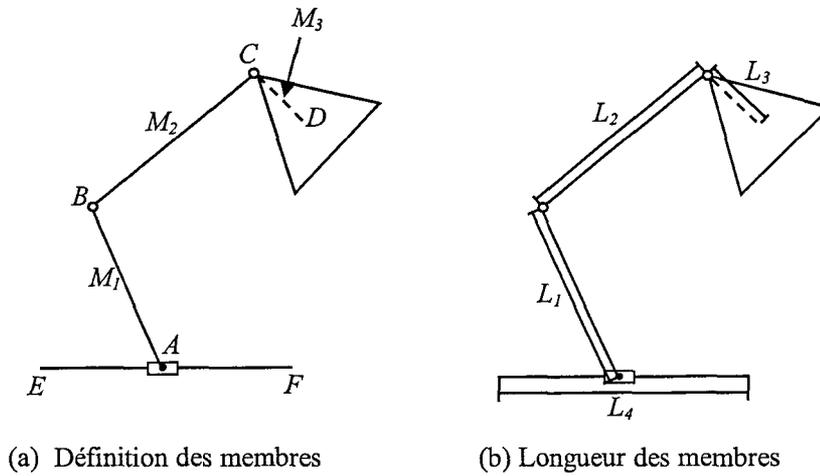
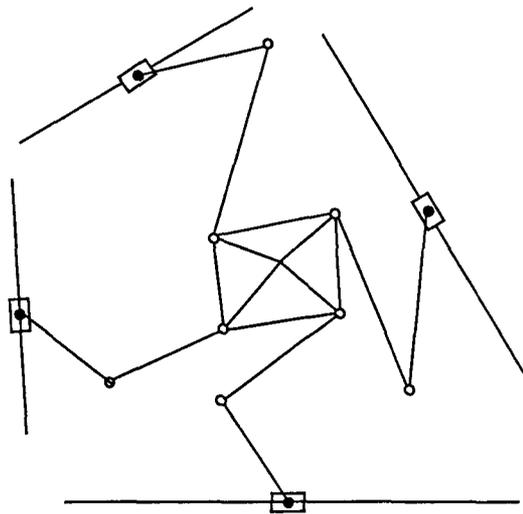


FIGURE 3.6 – Patte avec redondance PRRR

FIGURE 3.7 – Exemple d'un manipulateur 4-PRRR

3.4 Manipulateurs n-PRPR

En ajoutant un actionneur prismatique à la base des pattes des manipulateurs 3-RPR, des manipulateurs 3-PRPR sont créés. Ces manipulateurs ont trois

chaînes cinématiques avec une articulation prismatique active ajoutée à leur base. Un exemple de ce type de manipulateur est illustré à la figure 3.8.

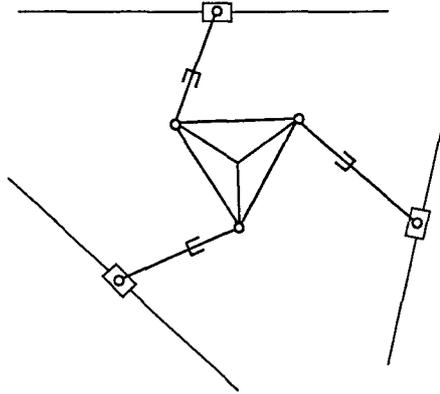


FIGURE 3.8 – Exemple d'un manipulateur 3-PRPR

Chaque patte des manipulateurs 3-PRPR a une architecture PRPR. La première articulation est un actionneur prismatique. Une rotoïde passive est fixée à cet actionneur, suivie d'un autre actionneur prismatique et finalement d'une rotoïde passive qui relie la plate-forme au reste de la patte. La figure 3.9 illustre un exemple de ce type de patte.

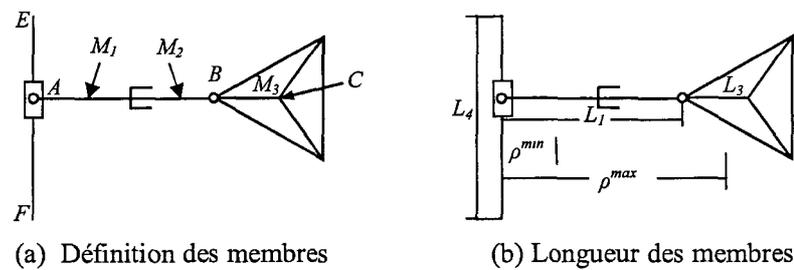


FIGURE 3.9 – Exemple d'une patte PRPR

Les dimensions de cette figure sont une combinaison des dimensions présentées aux sections 3.2 et 3.3. Les définitions des points E et F et de la longueur L_4 sont

présentées dans la section 3.3 et le reste est présenté dans la section 3.2. L'espace dextre de tout manipulateur n -PRPR peut être obtenu avec la méthode présentée dans ce travail.

3.5 Manipulateurs n -RRRR

Le deuxième type de redondance cinématique étudié est celui qui résulte de l'ajout d'un actionneur rotoïde et d'un membre à la base de chaque patte. Lorsque cet actionneur est ajouté aux pattes sans redondance d'architecture RRR des manipulateurs 3 -RRR, un manipulateur 3 -RRRR en résulte. Un exemple de ce manipulateur est montré à la figure 3.10.

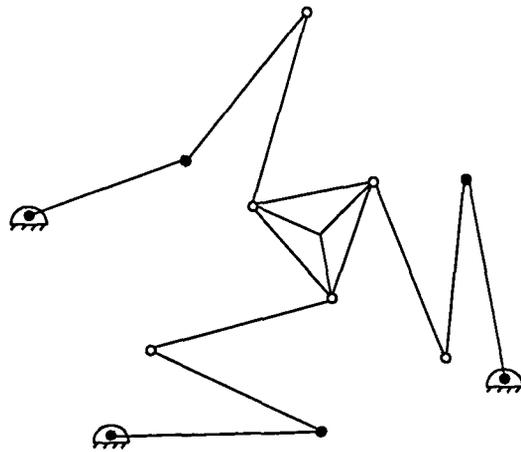


FIGURE 3.10 – Exemple d'un manipulateur 3 -RRRR

Ce manipulateur a trois pattes avec redondance cinématique d'architecture RRRR avec deux rotoïdes actives suivies de deux rotoïdes passives. Un exemple de cette architecture de patte est illustré à la figure 3.11. Dans cette figure, M_4 et L_4 sont le membre de l'articulation redondante et sa longueur, respectivement, et

le point E est la position fixe de la nouvelle base de la patte. Cette position est la position de la rotoïde redondante. Les autres dimensions de cette architecture de patte sont présentées dans la section 3.1.

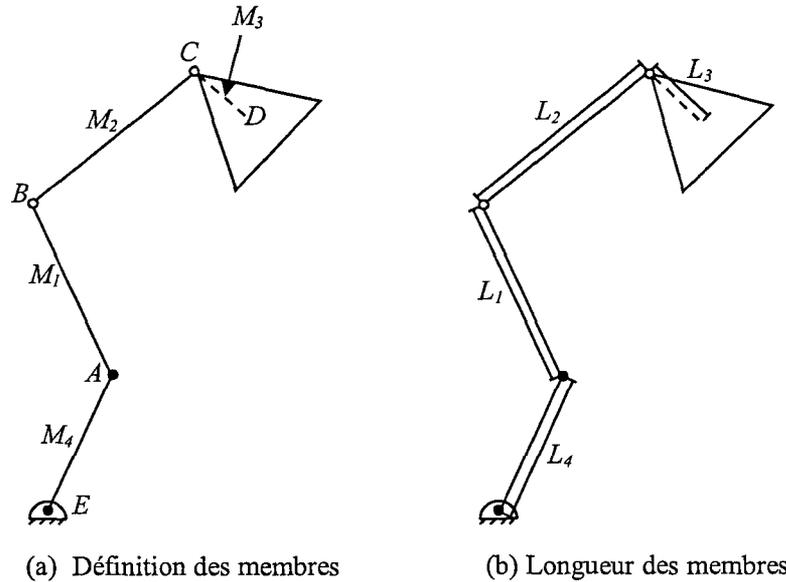


FIGURE 3.11 – Exemple d'une patte d'architecture RRRR

Il est à noter que, comme c'est le cas des autres manipulateurs parallèles présentés, l'espace dextre des manipulateurs avec n'importe quel nombre de pattes peut être déterminé avec la méthode présentée dans ce travail.

3.6 Manipulateurs n-RRPR

Le dernier manipulateur étudié est un autre manipulateur avec un actionneur rotoïde comme redondance cinématique. Cette fois, cette redondance est appliquée aux manipulateurs 3-RPR et forme un manipulateur 3-RRPR. Un exemple de ce

manipulateur est illustré à la figure 3.12.

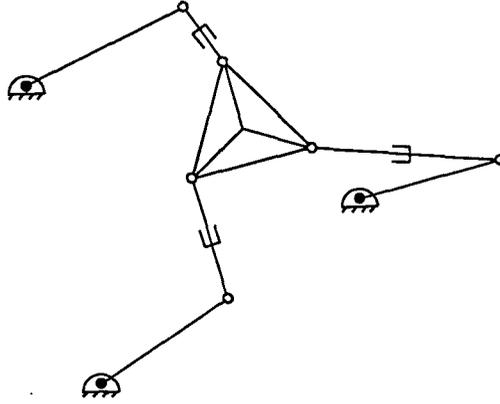


FIGURE 3.12 – Exemple d'un manipulateur 3-RRPR

Chaque patte de ce manipulateur a une architecture RRPR comme il est montré à la figure 3.13. Dans cette figure, les paramètres E , M_4 et L_4 sont expliqués dans la section 3.5 et le reste des dimensions sont expliquées dans la section 3.2.

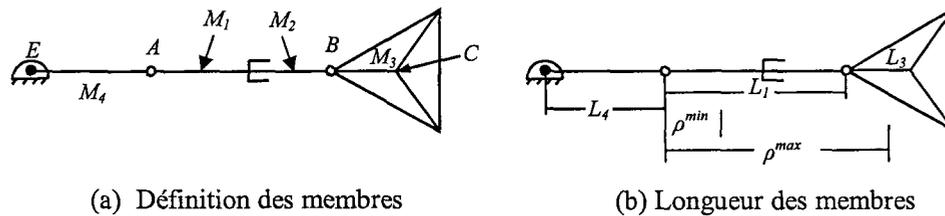


FIGURE 3.13 – Exemple d'une patte d'architecture RRPR

Encore une fois, l'espace dextre de tous les manipulateurs n -RRPR est étudié dans ce travail.

Chapitre 4

Méthode géométrique générale du calcul de l'espace dextre des manipulateurs parallèles plans

Dû à la nature des manipulateurs parallèles, la détermination de l'espace dextre de tout manipulateur parallèle plan peut être faite de la même façon. Ce chapitre présente une méthode géométrique du calcul de l'espace dextre des manipulateurs parallèles plans et peut s'appliquer à tout manipulateur parallèle plan. Cette méthode peut être résumée avec les cinq étapes suivantes :

- Étape 1 : Détermination de la forme de l'espace dextre de chaque patte et définition de toutes les droites et de tous les arcs qui en définissent la frontière.
- Étape 2 : Calcul de tous les points où les frontières de l'espace dextre de chaque patte s'entrecroisent.
- Étape 3 : Segmentation de chaque droite et arc aux points d'intersection et

définition des nouveaux segments formés.

- Étape 4 : Détermination des segments qui font partie de l'espace dextre de toutes les pattes du manipulateur et l'espace dextre du manipulateur.
- Étape 5 : Intégration le long de la frontière de l'espace dextre pour calculer l'aire de l'espace dextre du manipulateur.

Les cinq sections suivantes expliquent les cinq étapes plus en détail. Par contre, les détails spécifiques aux manipulateurs étudiés sont présentés dans les chapitres 5 et 6.

4.1 Étape 1 : Frontière de l'espace dextre de chaque patte

Puisque l'espace dextre de tout manipulateur parallèle est formé par l'intersection de l'espace dextre de chacune de ses pattes, la première étape est de déterminer la forme de l'espace dextre de chaque patte. Ensuite il est possible de définir les droites et les arcs qui en forment la frontière. Les pattes des manipulateurs étudiés dans ce travail ont une configuration PRRR, RRRR, PRPR ou RRPR. Tel qu'expliqué au chapitre 3, ces configurations sont basées sur les pattes de manipulateurs non-redondants soit, RRR et RPR. Puisque l'effet de l'articulation redondante sur l'espace dextre peut être considéré séparément de l'espace dextre de la patte sans redondance, la première étape de la détermination de l'espace dextre de chaque patte est de définir l'espace dextre des pattes sans redondance. Par la suite, l'effet de l'articulation redondante est considéré pour définir l'espace dextre de chaque patte avec

redondance cinématique.

Dans ce travail, toutes les pattes sont composées d'articulations prismatiques et d'articulations rotoïdes et aucune limite n'est imposée sur les rotoïdes. La frontière de l'espace dextre de chaque patte, et conséquemment de chaque manipulateur, est alors composée d'arcs et de droites ou de cercles seulement. Ceci simplifie la définition de la frontière considérablement. De plus, un cercle peut être traité de la même façon qu'un arc. La forme de l'espace dextre de chaque patte varie en fonction de sa configuration et les détails de la définition de l'espace dextre de chaque patte ainsi que l'effet de l'ajout de l'articulation redondante sont présentés au chapitre 5.

4.2 Étape 2 : Intersection des droites et des arcs de la frontière

Après avoir déterminé l'espace dextre de toutes les pattes, l'intersection de ceux-ci peut alors être trouvée. L'espace dextre d'un manipulateur parallèle est composé de l'intersection de l'espace dextre de chacune des pattes.

Premièrement, tous les points d'intersection des droites et des arcs de la frontière de l'espace dextre de toutes les pattes sont trouvés. Il existe plusieurs méthodes pour déterminer les points d'intersection entre deux arcs, une droite et un arc et deux droites. Dans cette section, une méthode géométrique est présentée.

4.2.1 Intersection de deux arcs

Pour déterminer les points d'intersection de deux arcs, s'ils existent, les points d'intersection entre les cercles d'où proviennent les arcs sont premièrement trouvés et ensuite il est vérifié si ces points sont véritablement sur les deux arcs. La première étape est donc de vérifier si la distance entre le centre des deux arcs respecte les conditions nécessaires pour que les cercles s'intersectent. La figure 4.1 illustre un exemple de deux arcs qui s'intersectent.

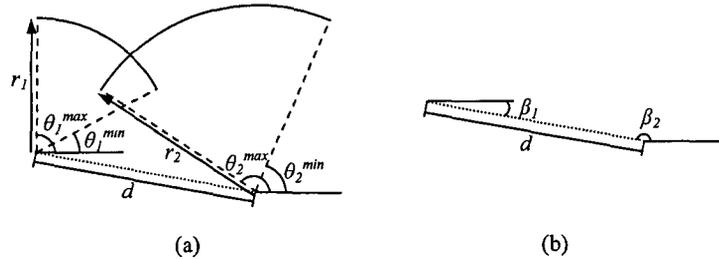


FIGURE 4.1 – Intersection de deux arcs

Dans la figure 4.1(a), d est la distance entre le centre des deux arcs, θ_1^{min} et θ_1^{max} sont les angles du début et de la fin du premier arc, respectivement, θ_2^{min} et θ_2^{max} sont les angles du début et de la fin du deuxième arc, respectivement, r_1 est le rayon du premier arc et r_2 est le rayon du deuxième arc. L'angle β_1 est l'angle de la droite d dans la direction du centre de l'arc 1 vers le centre de l'arc 2. L'angle β_2 est l'angle de la droite d dans le sens inverse. Deux cercles s'intersectent si les équations suivantes sont vraies :

$$d \leq r_1 + r_2 \quad (4.1)$$

$$d \geq |r_1 - r_2| \quad (4.2)$$

Si les deux côtés d'une de ces équations s'égalisent, seulement un point d'intersection potentiel existe. Sinon, les deux points d'intersection potentiels sont identifiés à l'aide des triangles montrés à la figure 4.2. Dans la figure 4.2(a), A_1 et A_2 sont les points du centre de chaque arc, P_1 et P_2 sont les deux points d'intersection, α_1 est l'angle entre la droite A_1A_2 et la droite A_1P_1 ou la droite A_1P_2 et α_2 est l'angle entre la droite A_1A_2 et la droite A_2P_1 ou la droite A_2P_2 . Dans la figure 4.2(b), ψ_{ij} est l'angle de la droite du centre du j^e arc au point d'intersection P_i par rapport à l'axe x .

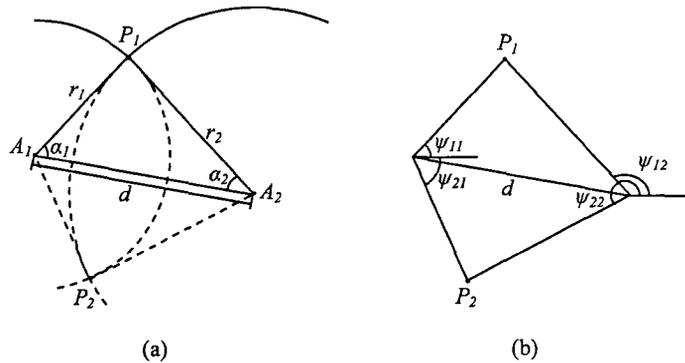


FIGURE 4.2 – Définition des paramètres utilisés pour déterminer l'intersection de deux arcs

À l'aide de la loi des cosinus, il est possible de calculer les angles α_1 et α_2 :

$$\alpha_1 = \cos^{-1} \left(\frac{r_1^2 + d^2 - r_2^2}{2r_1d} \right) \quad (4.3)$$

$$\alpha_2 = \cos^{-1} \left(\frac{r_2^2 + d^2 - r_1^2}{2r_2d} \right) \quad (4.4)$$

Enfin il ne reste qu'à déterminer si les points d'intersection calculés sont sur les

arcs ou non. Pour ceci, l'angle de chaque point d'intersection par rapport à chaque arc doit être compris entre les angles correspondant aux extrémités de l'arc respectif. La condition suivante exprime cette vérification :

$$\theta_j^{min} \leq \psi_{ij} \leq \theta_j^{max} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad (4.5)$$

où ψ_{ij} est l'angle du point d'intersection sur l'arc j par rapport au repère fixe. Pour évaluer la position du point P_1 (voir figures 4.1 et 4.2) on utilise :

$$\psi_{11} = \beta_1 + \alpha_1, \quad \psi_{12} = \beta_2 - \alpha_2 \quad (4.6)$$

et pour évaluer la position du point P_2 :

$$\psi_{21} = \beta_1 - \alpha_1, \quad \psi_{22} = \beta_2 + \alpha_2 \quad (4.7)$$

Il est à noter que les angles β_1 et β_2 de la figure 4.1(b) peuvent prendre des valeurs négatives mais que les angles α_1 et α_2 de la figure 4.2 sont toujours positifs.

Puisqu'un point potentiel doit être sur les deux arcs pour être un point d'intersection, la condition (4.5) doit être vraie pour $j = 1, 2$.

4.2.2 Intersection d'un arc et d'une droite

Dans le cas d'un arc et d'une droite, comme dans le cas de deux arcs, deux points d'intersection sont possibles. La première étape est de trouver le point sur la droite le plus près du centre de l'arc et de déterminer si la distance entre ce point et le centre de l'arc est plus petite que le rayon de l'arc. Si oui, deux points d'intersection

potentiels sont trouvés. La figure 4.3 illustre les points d'intersection potentiels.

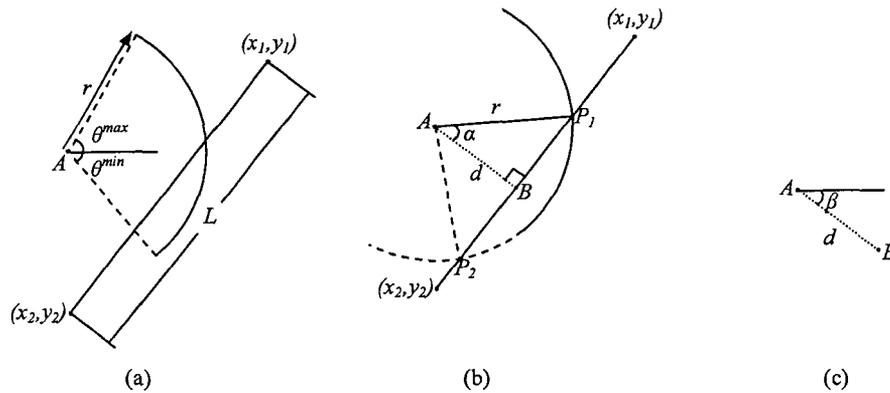


FIGURE 4.3 – Intersection d'un arc et d'une droite

Dans la figure 4.3(a), θ^{min} et θ^{max} sont les angles du début et de la fin de l'arc, respectivement, r est le rayon de l'arc, le point A est le centre de l'arc, L est la longueur de la droite et (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont les coordonnées du début et de la fin de la droite, respectivement. Dans la figure 4.3(b), B est le point sur la droite le plus près du centre de l'arc. Il est à noter que le point B n'est pas nécessairement sur la droite, il peut être sur l'extension de la droite. La distance entre le point B et le centre de l'arc (A) est représenté par d , P_1 et P_2 sont les points d'intersection potentiels et α est l'angle entre la droite AB et la droite AP_1 ou la droite AP_2 . Dans la figure 4.3(c), β est l'angle de la droite AB . L'angle β peut prendre une valeur négative, comme c'est le cas à la figure 4.3, mais α est toujours positif.

Le point sur la droite le plus près du centre de l'arc, B peut être trouvé à l'aide du fait que la droite de ce point au centre de l'arc est perpendiculaire à la droite de (x_1, y_1) à (x_2, y_2) . Si m est la pente de la droite (x_1, y_1) à (x_2, y_2) , il peut être démontré que les coordonnées du point B peuvent être calculées à l'aide des équations

suivantes :

$$B_x = \frac{A_y + \frac{A_x}{m} - y_1 + mx_1}{m + \frac{1}{m}} \quad (4.8)$$

$$B_y = mB_x + y_1 - mx_1 \quad (4.9)$$

Par contre, si la droite est verticale, la pente m sera infinie et si la droite est horizontale, la pente sera nulle. Ces deux situations causent des problèmes à ces équations. Quand la droite est horizontale, la valeur sur l'axe y est constante et le point le plus près du centre de l'arc est simplement :

$$B_x = A_x \quad (4.10)$$

$$B_y = y_1 = y_2 \quad (4.11)$$

Si la droite est verticale, la valeur sur l'axe x est constante et le point le plus près du centre de l'arc est simplement :

$$B_x = x_1 = x_2 \quad (4.12)$$

$$B_y = A_y \quad (4.13)$$

Si $d < r$, les points d'intersection potentiels peuvent être trouvés à l'aide de α qui peut facilement être déterminé. Si $d = r$, un point d'intersection à B correspondant à $\alpha = 0$ est identifié.

Il faut enfin déterminer si les points d'intersection potentiels sont sur l'arc et sur la droite. Un point d'intersection est sur l'arc quand :

$$\theta^{min} \leq \psi_i \leq \theta^{max} \quad i = 1, 2 \quad (4.14)$$

où ψ_1 est l'angle de la droite passant par le centre de l'arc et par le premier point d'intersection par rapport à l'axe x :

$$\psi_1 = \beta + \alpha \quad (4.15)$$

et ψ_2 est l'angle de la droite passant par le centre de l'arc et par le deuxième point d'intersection par rapport à l'axe x :

$$\psi_2 = \beta - \alpha \quad (4.16)$$

Pour vérifier si le point d'intersection est sur la ligne, ses coordonnées doivent être calculées. Celles-ci peuvent être trouvées à l'aide des équations suivantes :

$$x_P = a + r \cos(\psi_i) \quad (4.17)$$

$$y_P = b + r \sin(\psi_i) \quad (4.18)$$

où (a, b) sont les coordonnées du centre de l'arc. Un point d'intersection potentiel est sur la droite si les deux conditions suivantes sont respectées :

$$\sqrt{(x_P - x_1)^2 + (y_P - y_1)^2} \leq L \quad (4.19)$$

$$\sqrt{(x_P - x_2)^2 + (y_P - y_2)^2} \leq L \quad (4.20)$$

4.2.3 Intersection de deux droites

La façon la plus simple de déterminer l'intersection de deux droites est d'utiliser l'équation de la droite. Cependant, puisqu'une droite verticale a une pente infinie, il est plus difficile de la traiter dans un algorithme numérique. Une approche géométrique a donc été utilisée. La figure 4.4 illustre les dimensions importantes pour trouver le point d'intersection.

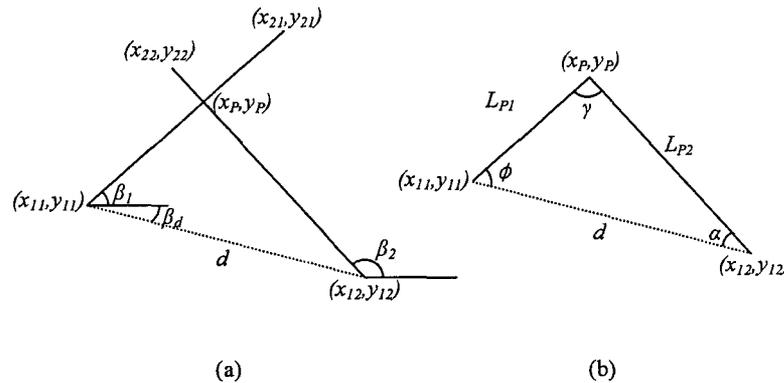


FIGURE 4.4 – Intersection de deux droites

Dans la figure 4.4(a), (x_{ij}, y_{ij}) , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ sont les coordonnées du début et de la fin de la première et de la deuxième droite et suivent la convention suivante :

- $i = 1, 2$ - Début de la droite et fin de la droite, respectivement.
- $j = 1, 2$ - Première et deuxième droite, respectivement.

Dans cette même figure, β_1 , β_2 et β_d sont, respectivement, les angles de la première droite, de la deuxième droite et de la droite de longueur d qui relie le début de la première droite au début de la deuxième droite. Les coordonnées du point d'intersection des deux droites sont représentées par (x_P, y_P) .

Dans la figure 4.4(b), un triangle est créé avec le point d'intersection et le début

de chaque droite. L_{P1} est la longueur de la droite du début de la première droite jusqu'au point d'intersection et L_{P2} est la longueur de la droite du début de la deuxième droite jusqu'au point d'intersection. Les trois angles peuvent être trouvés à l'aide des équations suivantes :

$$\phi = \beta_1 - \beta_d \quad (4.21)$$

$$\alpha = \beta_d + \pi - \beta_2 \quad (4.22)$$

$$\gamma = \pi - \phi - \alpha \quad (4.23)$$

La loi des sinus peut ensuite être utilisée pour trouver la longueur des côtés du triangle de la figure 4.4(b), L_{P1} et L_{P2} . Enfin, si ces longueurs sont entre 0 et la longueur de leurs droites respectives, le point d'intersection est sur les deux droites et est donc valide.

4.3 Étape 3 : Segmentation des droites et des arcs des frontières

Avec tous les points d'intersection identifiés, il faut ensuite trier les points d'intersection et segmenter les droites et les arcs. Le triage des points d'intersection est plus simple s'ils sont exprimés sous la forme d'une longueur pour les droites et d'un angle pour les arcs. Plus spécifiquement, pour un point d'intersection sur une droite, seulement la distance du début de la droite au point d'intersection en question est enregistrée. D'une façon similaire, seulement l'angle sur l'arc du début au point d'in-

tersection est enregistré. De cette façon, les points d'intersection de chaque droite et de chaque arc peuvent facilement être triés.

La figure 4.5 illustre les points d'intersection ainsi que les longueurs et les angles nécessaires pour les identifier. Dans la figure 4.5(a), P_i est le point d'intersection i , θ^{min} et θ^{max} sont, respectivement, l'angle du début et de la fin de l'arc et ψ_i est l'angle du point P_i par rapport à l'axe x . Dans la figure 4.5(b), P_i est le point d'intersection i , (x^{min}, y^{min}) sont les coordonnées du début de la droite, (x^{max}, y^{max}) sont les coordonnées de la fin de la droite et L_i est la distance du début de la droite au point d'intersection i . Dans tous les cas, $i = 1, \dots, n$.

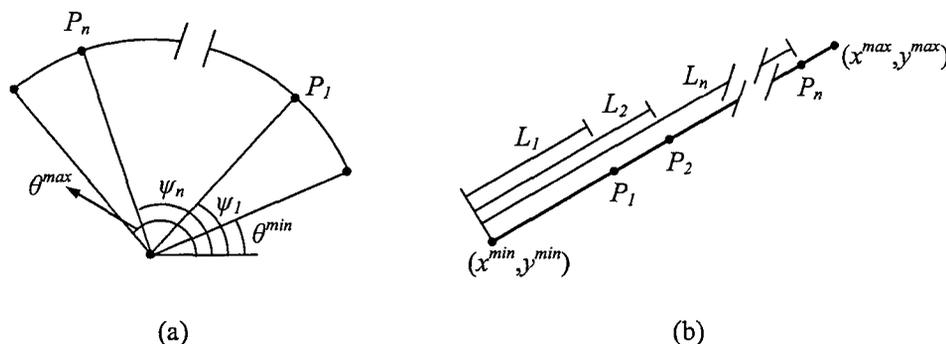


FIGURE 4.5 – Points d'intersection d'une droite et d'un arc

Le premier segment d'un arc est alors de l'angle θ^{min} à l'angle ψ_1 , ainsi de suite et les segments de droites sont de (x^{min}, y^{min}) jusqu'à (x_1, y_1) , ainsi de suite. Créer tous les segments de droites et les arcs nécessaires devient donc relativement simple : un arc ou une droite est divisé en $n + 1$ segments.

4.4 Étape 4 : Frontière de l'espace dextre des manipulateurs

Après avoir terminé la segmentation de tous les arcs et de toutes les droites, il est possible de créer une liste de segments de droites et d'arcs pour chaque patte. Puisque l'espace dextre d'un manipulateur parallèle est simplement l'intersection de l'espace dextre de chacune de ses pattes, si un segment est à l'intérieur de l'espace dextre de toutes les pattes dont il ne provient pas, ce segment fait partie de la frontière de l'espace dextre du manipulateur.

À cette étape, tous les points d'intersection sont identifiés et les arcs et les droites sont segmentés en conséquence. Il n'y a donc aucune intersection d'un segment avec un autre. Dû à ce fait, si un point sur un segment fait partie de la frontière de l'espace dextre, le segment entier en fait partie. Le processus pour déterminer si un segment fait partie de la frontière de l'espace dextre du manipulateur est alors réduit à vérifier si un point sur le segment est à l'intérieur de l'espace dextre de chaque patte dont il ne provient pas. Le point au centre du segment est choisi pour faire cette vérification car il est facilement calculé et il évite des erreurs de la mise en oeuvre d'un algorithme dues à la troncation des variables numériques.

Puisque plusieurs manipulateurs sont étudiés dans ce travail et que la forme de l'espace dextre de chacune des pattes est différente, les détails de la vérification de chaque segment appliquée à chaque manipulateur sont présentés dans le chapitre 6.

4.5 Étape 5 : Aire de l'espace dextre des manipulateurs parallèles

En appliquant le théorème de la divergence de Gauss (voir par exemple, Buck (1965)) aux surfaces planes, il est possible d'intégrer le long de la frontière de l'espace dextre pour en obtenir l'aire (Gosselin et Guillot, 1991) :

$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{s}^T \mathbf{n} d\partial\Omega \quad (4.24)$$

où A est l'aire de l'espace dextre, $\partial\Omega$ représente la frontière, \mathbf{s} est le vecteur position d'un point sur la frontière et \mathbf{n} est le vecteur unitaire, perpendiculaire à la frontière et vers l'extérieur de la surface. Tel qu'expliqué à la section 4.4, la frontière peut être définie par une série de segments donc l'équation (4.24) peut être réécrite comme :

$$A = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N_a} A_i + \sum_{i=1}^{N_l} B_i \right) \quad (4.25)$$

où

$$A_i = \int_{\partial\Omega_i^a} \mathbf{s}^T \mathbf{n} d\partial\Omega_i^a \quad (4.26)$$

$$B_i = \int_{\partial\Omega_i^l} \mathbf{s}^T \mathbf{n} d\partial\Omega_i^l \quad (4.27)$$

et où N_a et N_l sont le nombre d'arcs et de droites, respectivement, qui forment la frontière et où $\partial\Omega_i^a$ et $\partial\Omega_i^l$ représentent l' i ème arc et l' i ème droite, respectivement, de la frontière. L'avantage majeur de cette méthode est qu'il n'est pas nécessaire que les droites et les arcs soient ordonnés, la contribution de chaque droite et de chaque arc

peut être calculée séparément à l'aide des équations (4.26) et (4.27) et additionnée à l'aide de l'équation (4.25). En plus, des expressions simples peuvent être obtenus pour A_i (voir par exemple, Gosselin et Martin (1996)) :

$$A_i = ar[\sin \theta_{max} - \sin \theta_{min}] - br[\cos \theta_{max} - \cos \theta_{min}] + r^2[\theta_{max} - \theta_{min}] \quad (4.28)$$

pour un arc externe et

$$A_i = -ar[\sin \theta_{max} - \sin \theta_{min}] + br[\cos \theta_{max} - \cos \theta_{min}] - r^2[\theta_{max} - \theta_{min}] \quad (4.29)$$

pour un arc interne, où (a,b) sont les coordonnées du centre de l'arc, r est le rayon de l'arc et θ_{min} et θ_{max} sont les angles du début et de la fin de l'arc, respectivement. Un arc externe signifie un arc où l'espace dextre est dans la partie concave de l'arc, c'est-à-dire, l'arc est une frontière externe de l'espace dextre. Un arc interne signifie un arc où l'espace dextre est du côté convexe de l'arc, c'est-à-dire, une frontière interne de l'espace dextre.

Des expressions simples peuvent aussi être obtenues pour B_i (adaptée de Gosselin et Martin (1996)) :

$$B_i = L(x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta) \quad (4.30)$$

et

$$B_i = L(-x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \quad (4.31)$$

où (x_1, y_1) sont les coordonnées du début de la droite, L en est la longueur et θ est l'angle de l'orientation de la droite de son début (x_1, y_1) vers sa fin (x_2, y_2) . Si le point du début de la droite est choisi de sorte que $x_1 \leq x_2$, θ sera borné entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ rad.

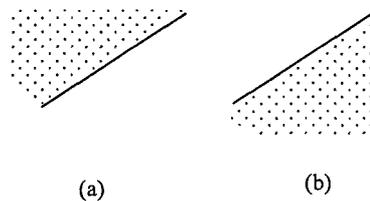


FIGURE 4.6 – Exemples de droites qui font partie de la frontière de l'espace dextre

L'équation (4.30) est alors utilisée quand l'espace est au-dessus de la droite tel qu'illustré à la figure 4.6(a) et l'équation (4.31) est utilisée quand l'espace dextre est en-dessous de la droite tel qu'illustré à la figure 4.6(b). Il est à noter que quand $x_1 = x_2$, la droite est verticale et l'équation (4.30) est utilisée quand l'espace est à gauche de la droite et l'équation (4.31) est utilisée quand l'espace est à sa droite.

Chapitre 5

Espace dextre des pattes

Puisque l'espace dextre de tout manipulateur parallèle est formé par l'intersection de l'espace dextre de chacune de ses pattes, l'espace dextre de chaque patte des manipulateurs étudiés doit *premièrement* être déterminé. Ceci est la première étape de la méthode présentée au chapitre précédent. Ce chapitre présente l'espace dextre des différentes architectures de pattes des manipulateurs étudiés.

5.1 Patte RRR

Tel qu'expliqué au chapitre 3, les configurations des pattes des manipulateurs n -RRRR (pattes RRRR) et n -PRRR (pattes PRRR) sont basées sur les configurations des pattes du manipulateur 3 -RRR (pattes RRR). De plus, il est possible d'étudier l'effet des articulations redondantes sur l'espace dextre des pattes RRRR et PRRR séparément de l'étude de l'espace dextre de la patte RRR. Déterminer l'espace dextre des pattes RRR est alors la première étape de la détermination de l'espace dextre des

pattes avec redondance RRRR et PRRR. Un exemple d'une patte RRR est illustré à la figure 5.1.

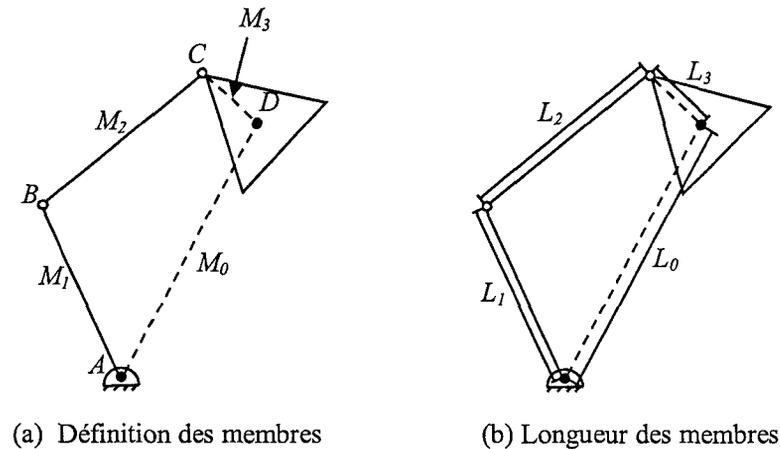


FIGURE 5.1 – Exemple d'une patte RRR

Les termes des figures 5.1(a) et (b) ont été définis à la section 3.1 sauf M_0 et L_0 . Le membre M_0 représente un membre entre la base de la patte et l'organe terminal et L_0 en est sa longueur. Il est à noter que la longueur L_0 change en fonction de la position de l'organe terminal.

Lorsque la position de l'organe terminal (D) est fixée mais que la plate-forme est libre de tourner autour du point D , une patte RRR devient analogue à un mécanisme à quatre barres. Pour une position donnée, si le point D est dans l'espace dextre de la patte considérée, M_3 est capable de compléter une pleine révolution autour de ce point D . L'espace dextre est, par conséquent, l'ensemble des points D où M_3 est une manivelle dans l'analogie du mécanisme à quatre barres.

De plus, toutes les positions avec une longueur L_0 identique forment le même mécanisme à quatre barres. Ainsi, si un point D correspondant à une longueur L_0

fait partie de l'espace dextre, tous les points sur un cercle de rayon de cette même valeur de L_0 font également partie de l'espace dextre. La détermination de l'espace dextre est alors réduite à varier la longueur de L_0 et à étudier son effet sur les propriétés du mécanisme à quatre barres qui en résulte.

Afin d'alléger le texte de cette section, les membres M_1 , M_2 et M_3 de la patte sont considérés des membres à longueur fixe (LF) et M_0 est considéré comme un membre à longueur variable (LV).

Selon la longueur de chaque membre du mécanisme, cinq catégories de mécanismes à quatre barres existent (voir par exemple, Myszka (2005)). Le tableau 5.1 résume les cinq catégories de mécanismes à quatre barres ainsi que les conditions dans lesquelles chacune se produit. La figure 5.2 illustre un exemple de chaque catégorie.

Tableau 5.1 – Catégories de mécanismes à quatre barres

Cas	Critère	Membre le plus court	Nom de la catégorie
1	$C + L < L_{I1} + L_{I2}$	M_0	Manivelle double
2	$C + L < L_{I1} + L_{I2}$	M_1 ou M_3	Manivelle-berceur
3	$C + L < L_{I1} + L_{I2}$	M_2	Berceur double
4	$C + L = L_{I1} + L_{I2}$	Tout	Singulier
5	$C + L > L_{I1} + L_{I2}$	Tout	Berceur triple

La nomenclature suivante est utilisée dans le tableau 5.1 :

- C = Longueur du membre le plus court.
- L = Longueur du membre le plus long.
- L_{I1} = Longueur d'un membre de longueur intermédiaire.
- L_{I2} = Longueur de l'autre membre de longueur intermédiaire.

Puisque le membre M_3 doit être capable de compléter une pleine révolution autour

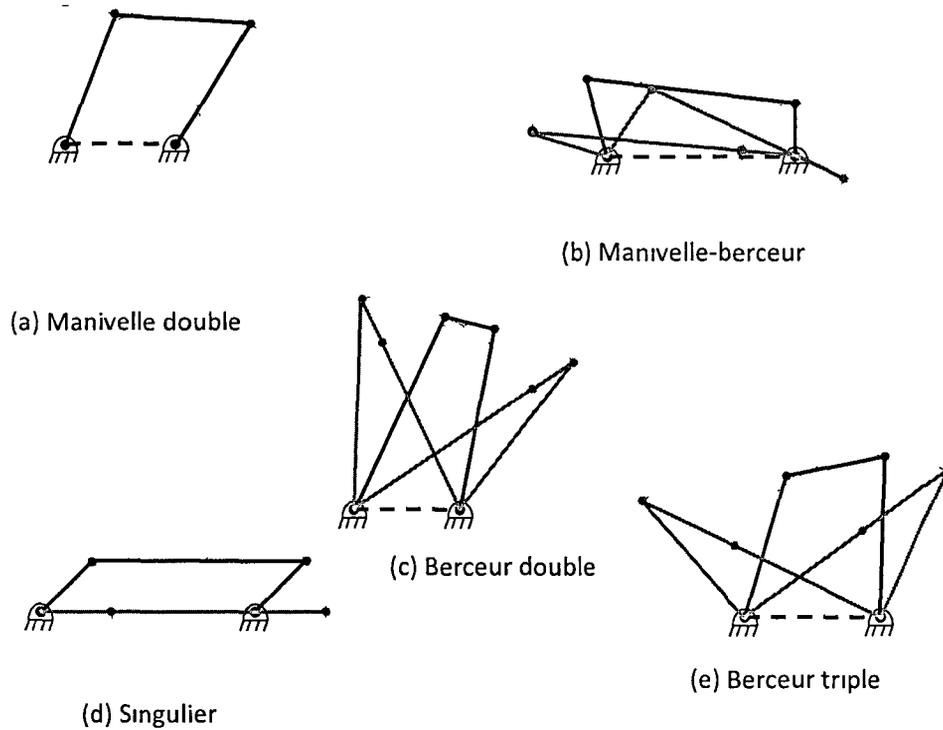


FIGURE 5.2 – Différentes catégories d'un mécanisme à quatre barres (adapté de (Myszka, 2005)).

du point D de la figure 5.1 pour qu'il soit inclus dans l'espace dextre, seulement trois de ces catégories sont utiles pour la détermination de l'espace dextre : manivelle double, manivelle-berceur et singulier. De plus, la catégorie manivelle-berceur est seulement utile quand M_3 est la manivelle et non le berceur. Il est aussi à noter que la catégorie singulier se produit durant la transition d'une catégorie à une autre, quand le mécanisme est en transition de triple berceur à manivelle-berceur, par exemple. Cette transition est infiniment petite alors cette catégorie n'est donc utile que pour identifier les points de transition d'une catégorie à une autre.

Pour une patte RRR donnée, les longueurs des trois membres LF sont connues.

La première étape pour trouver son espace dextre est donc d'identifier le membre LF le plus court. Puisque seulement le membre le plus court d'un mécanisme de la catégorie manivelle-berceur peut compléter une révolution, cette catégorie n'est utile que si M_3 est le membre le plus court. Deux cas se présentent alors : soit M_3 est le membre LF le plus court ou soit il ne l'est pas. Dans ce qui suit, toutes les catégories de mécanisme qui résultent de la variation de L_0 de sa valeur maximale vers une valeur nulle sont étudiées.

5.1.1 Cas où M_3 n'est pas le membre LF le plus court

La valeur maximale de la longueur L_0 se produit quand la patte est complètement allongée. La longueur L_0 est donc la somme des longueurs des trois membres LF. Dans ce cas, d'après le tableau 5.1, la position de la patte résulte en un mécanisme berceur triple. La catégorie demeure ainsi jusqu'au point où l'équation suivante qui provient du critère de Grashof est vraie :

$$C + L \leq L_{I1} + L_{I2} \quad (5.1)$$

Lorsque M_0 est le membre le plus long, la valeur maximale de L_0 qui respecte l'équation (5.1) est alors :

$$L_0 = L_{I1} + L_{I2} - C \quad (5.2)$$

Lorsque L_0 est réduit davantage, le mécanisme résultant dépend du membre LF le plus court et puisque le cas où M_3 n'est pas le membre LF le plus court est considéré ici, le mécanisme est soit manivelle-berceur si M_1 est le membre le plus court ou

berceur double si M_2 est le membre le plus court. Cependant, même si le mécanisme est de catégorie manivelle-berceur, si M_3 n'est pas le membre LF le plus court, il n'est pas une manivelle.

La seule catégorie qui permet un tour complet à M_3 est alors la manivelle double quand M_0 est plus court que les membres LF. Dans cette situation, l'équation (5.1) devient alors :

$$L_0 + L \leq L_{I1} + L_{I2} \quad (5.3)$$

La longueur L_0 la plus grande qui respecte cette équation est donc :

$$L_0 = L_{I1} + L_{I2} - L \quad (5.4)$$

Cette équation représente une valeur de L_0 qui résulte en un mécanisme singulier. Selon l'inégalité de l'équation (5.3), on peut voir qu'une longueur L_0 plus grande résulte en un mécanisme berceur triple mais qu'une longueur plus courte résulte en un mécanisme manivelle double qui fait partie de l'espace dextre.

Un exemple d'une patte avec un espace dextre défini par un seul cercle est illustré à la figure 5.3. La valeur de L_0 dans l'équation (5.4) représente alors un rayon r_1 qui délimite l'espace dextre d'une patte dans laquelle M_3 n'est pas le membre le plus court. Une patte dont l'espace dextre est défini par un seul cercle est, dorénavant, dite de classe 1.

Il est, par contre, possible qu'une patte dans laquelle M_3 n'est pas le membre LF le plus court n'ait pas d'espace dextre du tout. Puisque la longueur de tous les membres incluant M_0 doit être positive, l'équation (5.4) ne peut pas être respectée

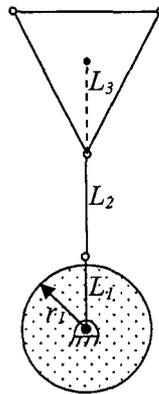


FIGURE 5.3 – Espace dextre d’une patte RRR de classe 1

quand un des membres LF est plus long que la somme des deux autres.

5.1.2 Cas où M_3 est le membre LF le plus court

Dans le cas où M_3 est le membre LF le plus court, une position D qui résulte en un mécanisme de catégorie manivelle-berceur fait partie de l’espace dextre de la patte. L’espace dextre d’une patte dans laquelle M_3 est le membre le plus court diffère alors du cas où il ne l’est pas.

Quand la patte est allongée, M_0 est plus long que les membres LF. Dans cette situation, d’après le tableau 5.1, la position de la patte résulte en un mécanisme triple berceur.

Ainsi, lorsque M_3 est le membre LF le plus court et M_0 est plus long que les membres LF, l’équation (5.1) devient :

$$L_3 + L_0 \leq L_1 + L_2 \quad (5.5)$$

Il est possible de voir que quand M_0 est le membre le plus long, sa longueur

maximale qui respecte l'équation (5.1) est :

$$L_0 = L_1 + L_2 - L_3 \quad (5.6)$$

À cette valeur, le mécanisme est singulier. Si la longueur L_0 augmente, selon l'inégalité de l'équation (5.5) le mécanisme tombe dans la catégorie berceur triple et aucun membre n'est capable de compléter une pleine révolution. Quand, par contre, la longueur L_0 est réduite, l'équation (5.1) est respectée et le mécanisme est de la catégorie manivelle-berceur. Puisque le membre le plus court est M_3 , ces valeurs de L_0 représentent des cercles qui font partie de l'espace dextre de la patte. L'équation (5.6) représente alors une limite externe de l'espace dextre de la patte. Éventuellement, quand la longueur L_0 est réduite davantage, M_0 devient plus court qu'un des membres intermédiaires (M_1 ou M_2 car M_3 est le membre le plus court dans ce cas). L'équation (5.1) devient alors :

$$L_3 + L_{I2} \leq L_{I1} + L_0 \quad (5.7)$$

où L_{I1} et L_{I2} sont, respectivement, les longueurs du plus court et du plus long des membres intermédiaires ($L_{I1} < L_{I2}$). La valeur minimale de L_0 qui respecte encore l'équation (5.1) est alors :

$$L_0 = L_3 + |L_1 - L_2| \quad (5.8)$$

où la valeur absolue est utilisée pour généraliser l'équation et donc éviter le besoin d'identifier le membre le plus court entre M_1 et M_2 . Dans ce cas le mécanisme est,

encore une fois, singulier. Cette configuration délimite cette fois, selon l'inégalité de l'équation (5.7), une limite interne de l'espace dextre de la patte.

Il est, par contre, possible d'avoir un mécanisme de catégorie manivelle double quand M_0 est le membre le plus court. Quand l'organe terminal de la patte se rapproche de sa base de sorte que $L_0 < L_3$, l'équation (5.1) devient :

$$L_0 + L_{I2} \leq L_3 + L_{I1} \quad (5.9)$$

L'équation suivante représente alors une deuxième limite externe, selon l'inégalité de l'équation (5.9), de l'espace dextre :

$$L_0 = L_3 - |L_1 - L_2| \quad (5.10)$$

Puisque les longueurs de tous les membres incluant M_0 doivent être positives, il n'est pas toujours possible de respecter l'équation (5.10). En effet, quand un des membres LF est plus long que la somme des longueurs des deux autres, il n'est pas possible de respecter cette équation et la patte n'a pas de deuxième espace dextre au centre.

La figure 5.4 montre l'espace dextre qui résulte des équations (5.6), (5.8) et (5.10). La figure 5.4(a) montre un exemple de l'espace dextre d'une patte dans laquelle le membre LF le plus long est plus long que la somme des longueurs des deux autres tandis que la figure 5.4(b) montre un exemple de l'espace dextre d'une patte où aucun membre LF n'est plus long que la somme des deux autres. Il est aussi à noter que la valeur de L_0 des équations (5.6), (5.8) et (5.10) représente, respectivement, la valeur des rayons r_3 , r_2 et r_1 de la figure 5.4. Une patte de classe 2 est alors définie

par deux cercles concentriques et une patte de classe 3 est définie par trois cercles concentriques.

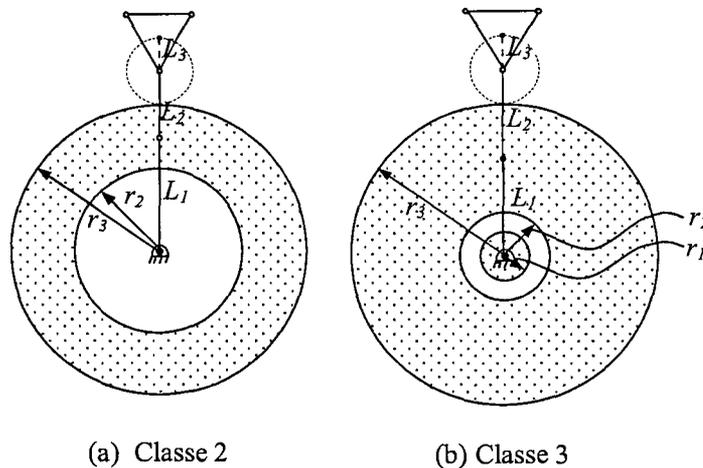


FIGURE 5.4 – Espace dextre de pattes de classe 2 et de classe 3

Les dimensions des membres LF ainsi que les rayons des cercles de l'espace dextre des pattes des figures 5.3 et 5.4 sont résumés dans le tableau 5.2. Le tableau 5.3 résume les conditions dans lesquelles chaque classe d'espace dextre se présente et indique quel rayon contribue aux frontières de cet espace.

Tableau 5.2 – Dimensions et rayons des pattes des figures 5.3 et 5.4

Figure	L_1	L_2	L_3	r_1	r_2	r_3
5.3	1.00	1.40	1.30	0.90	N/A	N/A
5.4(a)	1.60	0.90	0.46	N/A	1.16	2.04
5.4(b)	1.37	1.23	0.48	0.34	0.62	2.12

Tableau 5.3 – Conditions pour chaque classe d'espace dextre

	Aucun membre LF plus long que la somme des autres	Un membre LF plus long que la somme des autres
M_3 plus court membre LF	r_1, r_2 et r_3 (Classe 3)	r_2 et r_3 (Classe 2)
M_3 pas plus court membre LF	r_1 (Classe 1)	Aucun espace dextre

Dans cette section, il a été vu que quand l'organe terminal se déplace et que la valeur de L_0 varie, la patte tombe dans différentes catégories de mécanismes à quatre barres. La figure 5.5 illustre la transition d'une catégorie à une autre d'une patte de classe 3. Des transitions semblables se produisent avec les pattes des autres classes.

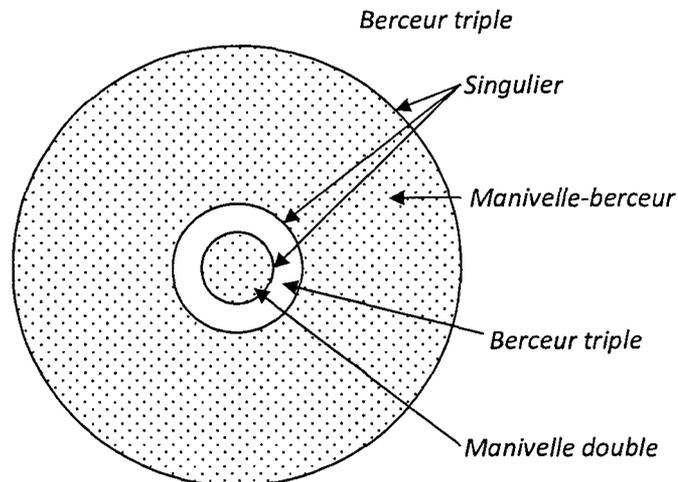


FIGURE 5.5 – Transition d'une catégorie de mécanisme à quatre barres à une autre qui forme l'espace dextre d'une patte de classe 3

5.2 Patte RPR

La patte RPR est à la base de la patte PRPR des manipulateurs d'architecture n-PRPR et de la patte RRPR des manipulateurs d'architecture n-RRPR. Il est donc nécessaire de déterminer les classes possibles d'espace dextre des pattes RPR afin de déterminer l'espace dextre des pattes PRPR et RRPR.

La figure 3.4 illustre un exemple d'une patte RPR. Les dimensions dans cette figure sont présentées à la section 3.2.

Puisque la première articulation est une rotoïde, l'espace dextre d'une patte RPR est défini par un ou plusieurs cercles concentriques dont le centre est à la rotoïde à la base de la patte. L'espace dextre des pattes RPR dépend de la longueur du membre qui représente la plate-forme de l'organe terminal, L_3 , et des limites inférieure et supérieure de la longueur de l'actionneur prismatique. En effet, la classe d'une patte peut être déterminée à l'aide des deux inégalités suivantes :

$$\rho_{min} < L_3 \quad (\text{Inégalité A}) \quad (5.11)$$

$$\rho_{max} - \rho_{min} > 2L_3 \quad (\text{Inégalité B}) \quad (5.12)$$

où ρ_{min} est la valeur minimale de L_1 et ρ_{max} est la valeur maximale de L_1 . Toutes les classes d'espace dextre d'une patte RPR peuvent être définies selon les quatre combinaisons du respect des inégalités dans les équations (5.11) et (5.12). Les combinaisons possibles sont énumérées dans le tableau 5.4. La classe résultante est expliquée dans les sections qui suivent. Par contre, il est à noter que dans certains cas spécifiques,

il peut y avoir des changements dans les classes du tableau 5.4. Ces cas spécifiques et les classes associées sont aussi expliqués dans les sections qui suivent.

Tableau 5.4 – Classes résultantes des combinaisons des inégalités A et B

Inégalité		Classe résultante de l'espace dextre
A	B	
Vraie	Fausse	1
Fausse	Vraie	2
Vraie	Vraie	3
Fausse	Fausse	Aucun espace dextre

5.2.1 Espace dextre de classe 1

Le premier cas étudié est celui où l'inégalité A est vraie et où l'inégalité B ne l'est pas. La figure 5.6 illustre un exemple d'une telle patte. Dans les figures 5.6(a) et 5.6(b), les positions extrêmes de l'organe terminal sont illustrées. Un espace dextre de la forme d'un cercle centré à la base de la patte se présente dû au respect de l'inégalité A. Le rayon du cercle de la figure 5.6(c), r_1 , est défini à l'aide de l'équation suivante :

$$r_1 = \min\{L_3 - \rho_{min} \ , \ \rho_{max} - L_3\} \quad (5.13)$$

Une position de l'organe terminal à l'extérieur d'un des cercles de rayon $(L_3 - \rho_{min})$ ou $(\rho_{max} - L_3)$ n'est pas dans l'espace dextre car une des positions extrêmes des figures 5.6(a) et 5.6(b) n'est pas possible. Le rayon du cercle de l'espace dextre est alors le plus petit rayon tel qu'indiqué à l'équation (5.13). Une patte dont l'espace dextre est défini par un seul cercle est, dorénavant, dite de classe 1. Cependant, si ρ_{max} est inférieur ou égal à L_3 , le minimum de l'équation (5.13) donne un rayon nul

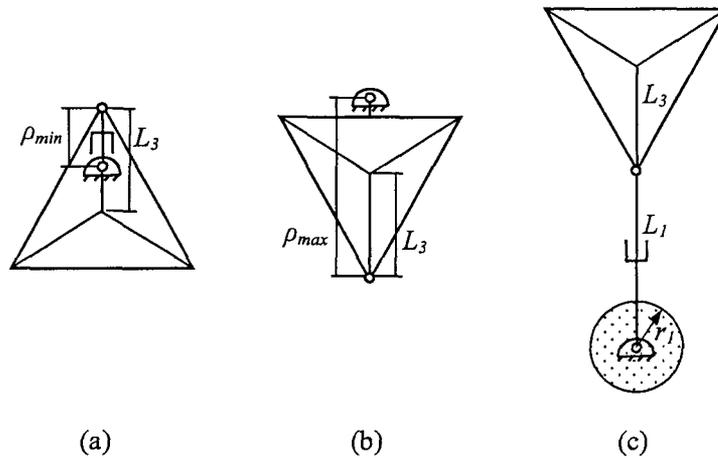


FIGURE 5.6 – Positions extrêmes et espace dextre d'une patte RPR de classe 1

ou négatif qui indique que la patte n'a pas d'espace dextre du tout.

5.2.2 Espace dextre de classe 2

Le deuxième cas étudié est celui où l'inégalité B est vraie et où l'inégalité A ne l'est pas. Dans ce cas, le cercle de rayon r_1 défini dans la section 5.2.1 n'est pas présent car si l'inégalité A n'est pas vraie, le rayon r_1 de l'équation (5.13) prend une valeur nulle ou négative. Ceci indique que l'espace dextre défini par r_1 n'existe pas. Une patte dont l'espace dextre est défini par deux cercles concentriques est dite de classe 2. La figure 5.7 illustre l'espace dextre ainsi que les positions extrêmes de la patte qui délimitent l'espace dextre d'une patte de cette classe.

Dans la figure 5.7(a), la limite interne de l'espace dextre est illustrée et la figure 5.7(b) illustre la limite externe de l'espace dextre. Puisque l'inégalité B est vraie, un espace dextre défini par deux cercles concentriques est présent. L'espace dextre de la patte est montrée dans la figure 5.7(c) où r_2 et r_3 sont les rayons des cercles

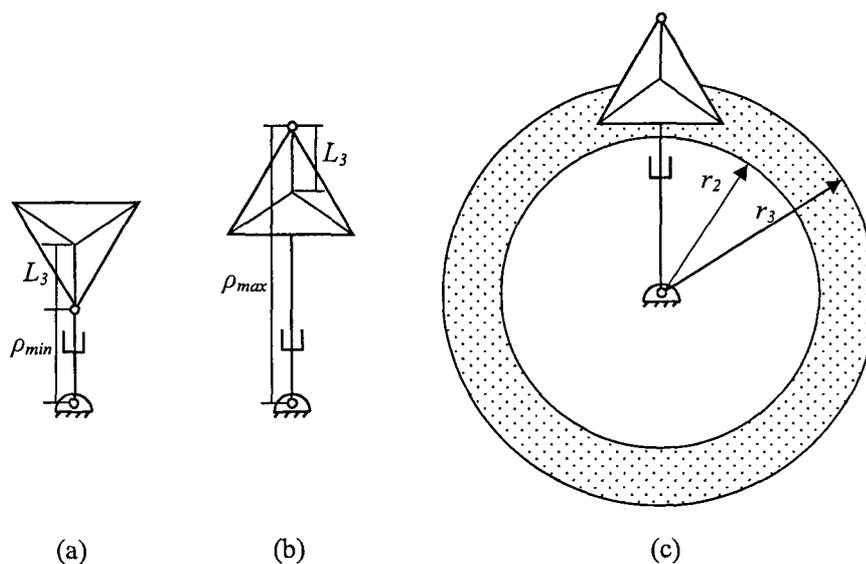


FIGURE 5.7 – Positions extrêmes et espace dextre d'une patte RPR de classe 2

concentriques qui définissent l'espace dextre de la patte. Les valeurs de ces rayons sont définies par les équations suivantes :

$$r_2 = \rho_{min} + L_3 \quad (5.14)$$

$$r_3 = \rho_{max} - L_3 \quad (5.15)$$

Afin que cet espace dextre existe, r_2 doit être inférieur à r_3 , d'où la condition de l'équation (5.12) devient évidente.

5.2.3 Espace dextre de classe 3

Tel qu'il a été vu aux sections 5.2.1 et 5.2.2, chacune des inégalités A et B sert à déterminer si une différente partie de l'espace dextre existe ou non. L'inégalité A sert

à déterminer si la partie de l'espace dextre définie par r_1 existe et l'inégalité B sert à déterminer si la partie de l'espace dextre définie par r_2 et r_3 existe. L'espace dextre d'une patte qui répond aux deux conditions est donc la combinaison de l'espace dextre d'une patte de classe 1 et de l'espace dextre d'une patte de classe 2. Un exemple d'une telle patte est illustré à la figure 5.8 où son espace dextre est alors défini par trois cercles concentriques de rayons r_1 , r_2 et r_3 . De plus, il peut être démontré que la condition de l'inégalité B fait en sorte que le rayon de l'inégalité A prend la valeur de $L_3 - \rho_{min}$ car elle est inférieure à $\rho_{max} - L_3$. Une patte dont l'espace dextre est défini par trois cercles concentriques est alors dite de classe 3.

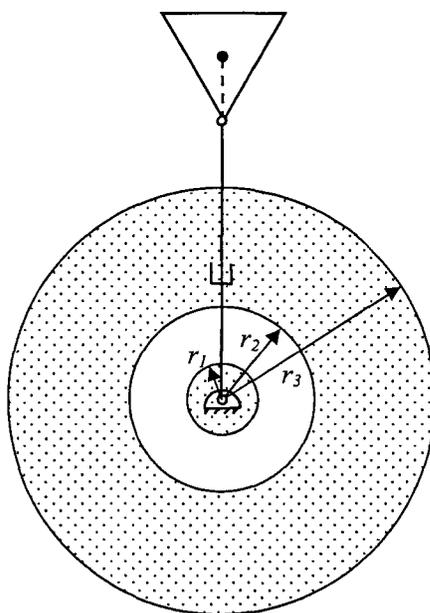


FIGURE 5.8 – Espace dextre d'une patte RPR de classe 3

Dans le cas unique où ρ_{min} est nul, r_1 et r_2 s'égalisent, ce qui indique que l'espace dextre défini par r_1 se relie à l'espace dextre défini par r_2 et r_3 . Dans ce cas, la patte devient de classe 1 où l'espace dextre est défini par un seul cercle de rayon r_3 .

Dans le cas où les deux inégalités A et B ne sont pas vraies, la patte n'a pas d'espace dextre du tout.

5.3 Pattes PRRR et PRPR

Dans les sections 5.1 et 5.2, il a été vu que les pattes RRR et RPR ont un espace dextre similaire. En effet, les trois classes d'espace dextre identifiées pour ces deux architectures de patte sont identiques. De plus, l'articulation redondante des architectures PRRR et PRPR est un actionneur prismatique ajouté à la rotoïde à la base des pattes RRR et RPR. Pour ces raisons, la détermination de l'espace dextre des pattes PRRR et PRPR est identique après la détermination des rayons et des classes qui définissent l'espace dextre des pattes RRR et RPR.

Dans cette section, l'effet de l'ajout de l'actionneur prismatique aux pattes RRR et RPR sur l'espace dextre est étudié. Ensuite, l'espace dextre résultant des pattes PRRR et PRPR est présenté. Afin d'alléger le texte de cette section, les pattes d'architectures PRRR et PRPR sont nommées des pattes avec redondance et les pattes RRR et RPR sont nommées des pattes sans redondance. De plus, l'actionneur prismatique redondant à la base de la patte est nommé simplement l'actionneur prismatique même si les pattes PRPR ont deux actionneurs prismatiques.

Premièrement, il est à observer qu'à chaque position de l'actionneur prismatique, si sa position est fixée, l'espace dextre de la patte résultante est celui d'une patte sans redondance. L'espace dextre d'une patte avec redondance est alors l'union de l'espace dextre de la patte sans redondance centré à chacune des positions possibles de l'actionneur prismatique. Cet effet est illustré à la figure 5.9.

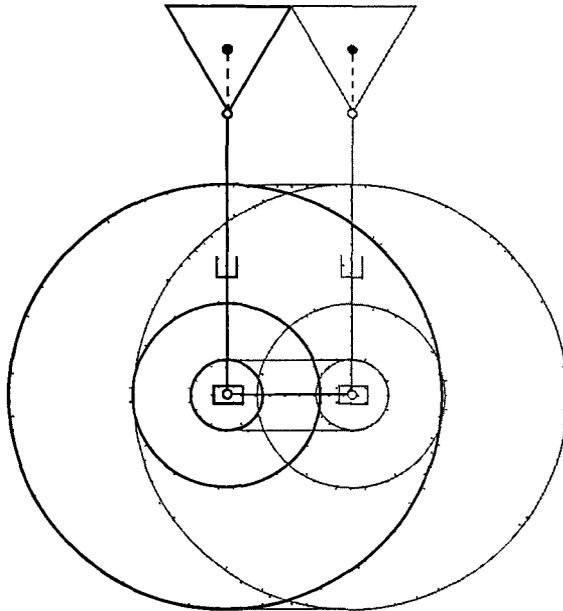


FIGURE 5.9 – Effet de l'actionneur prismatique redondant sur l'espace dextre d'une patte PRRR ou PRPR

Dans cette figure, il peut être observé que plusieurs types d'espace dextre peuvent se présenter selon la classe de l'espace dextre de la patte sans redondance ainsi que la course de l'actionneur prismatique. Ces types sont illustrés à la figure 5.10.

Les sections qui suivent expliquent tous ces types ainsi que toutes les conditions qui résultent en chaque type d'espace dextre.

5.3.1 Espace dextre de type A

Un espace dextre de type A est relativement simple à définir et est illustré à la figure 5.10(a). Sa frontière consiste de deux demi-cercles et de deux droites. Ces droites sont tangentes aux extrémités des demi-cercles et parallèles à l'axe de l'actionneur prismatique. L'espace dextre de type A consiste alors de deux demi-cercles

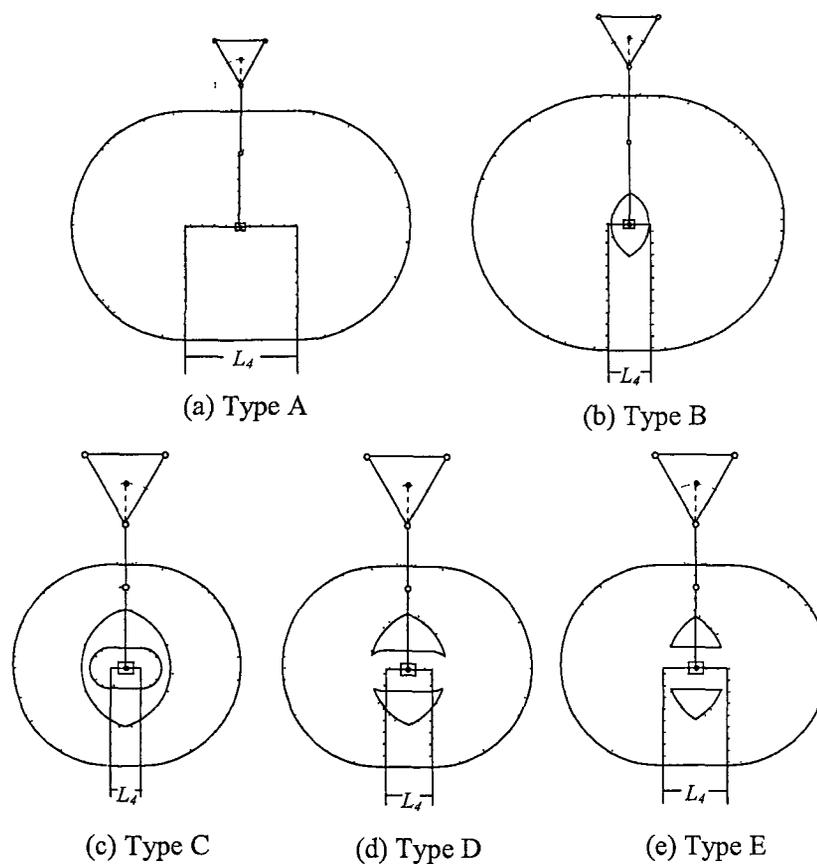


FIGURE 5.10 – Les cinq types d'espace dextre d'une patte PRRR ou PRPR

et d'un rectangle

Puisque l'espace dextre de classe 1 est défini par un seul cercle de rayon r_1 , une patte sans redondance de cette classe à laquelle est ajouté un actionneur prismatique résulte toujours en un espace dextre de type A. De plus, le rayon des demi-cercles de ce type est r_1 .

Une patte sans redondance dont l'espace dextre est de classe 2 résulte en un espace dextre de type A dans le cas où la course est suffisamment grande pour que la

partie définie par r_3 couvre la partie non-dextre définie par r_2 . Cet effet est illustré à la figure 5.11

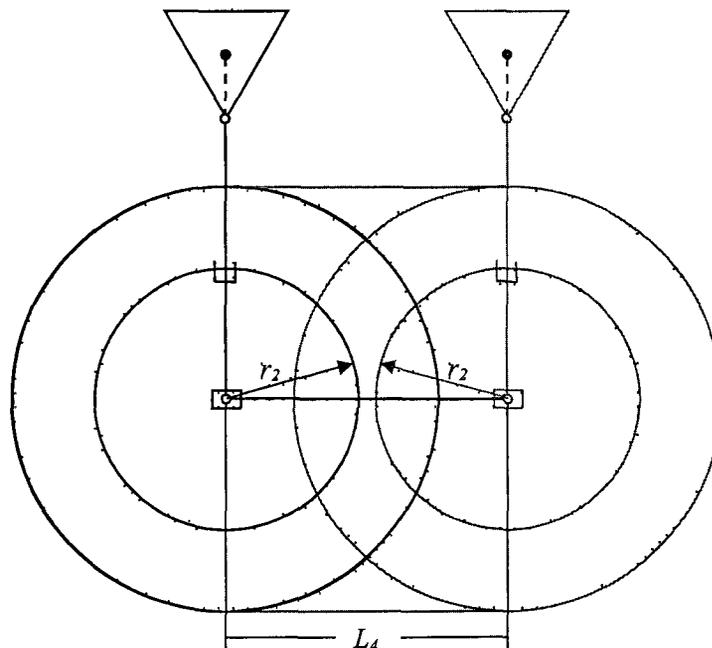


FIGURE 5.11 – Exemple d'espace dextre de type A d'une patte d'espace dextre de classe 2

Dans cette figure, il peut être observé qu'une patte sans redondance dont l'espace dextre est de classe 2 résulte en un espace dextre de type A quand les cercles de rayon r_2 ne sont plus en contact. Dans ce cas, le rayon des demi-cercles de l'espace dextre de type A est r_3 . Ceci est le cas lorsque la condition suivante est respectée

$$L_4 \geq 2r_2 \quad (5.16)$$

Une patte dont l'espace dextre est de classe 3 peut aussi résulter en un espace dextre de type A. Puisque l'espace dextre de classe 3 contient un cercle au centre de

rayon r_1 , la condition (5.16) ne s'applique pas directement. La figure 5.12 illustre le cas où un espace dextre de classe 3 résulte en un espace dextre de type A.

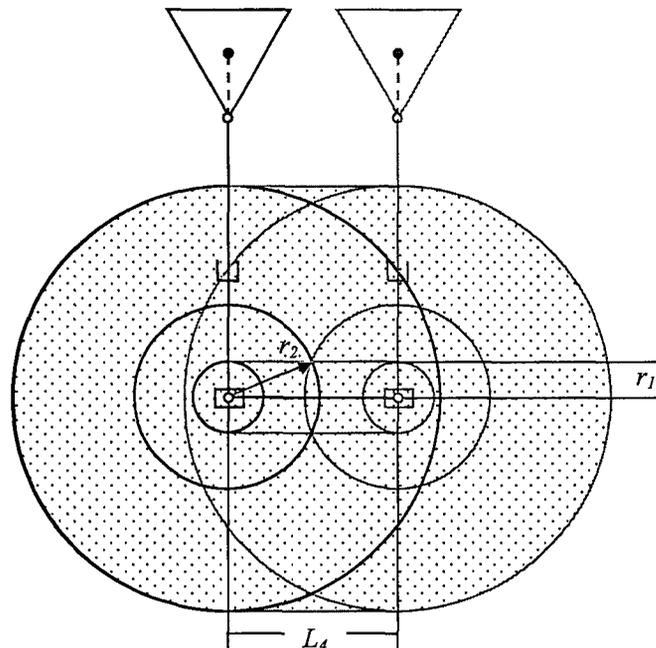


FIGURE 5.12 – Exemple d'espace dextre de type A d'une patte d'espace dextre de classe 3

Dans cette figure, il peut être observé que la course L_4 n'a pas besoin d'être aussi grande pour qu'un espace dextre de classe 3 résulte en un espace dextre de type A tel que pour le cas d'un espace dextre de classe 2. En effet, il peut être démontré qu'un espace dextre de classe 3 résulte en un espace dextre de type A quand la condition suivante est respectée :

$$L_4 \geq 2\sqrt{r_2^2 - r_1^2} \quad (5.17)$$

Le rayon des demi-cercles de l'espace dextre de type A quand il provient d'un

espace dextre de classe 3 est r_3 . Il est à noter qu'un espace dextre de classe 2 peut être simplement interprété comme un espace dextre de classe 3 avec $r_1 = 0$. La relation (5.16) est alors identique à la relation (5.17) lorsque $r_1 = 0$.

Frontière de l'espace dextre de type A

Il est intéressant de remarquer que tous les types d'espace dextre de la figure 5.10 ont les deux mêmes axes de symétrie. Le premier axe est colinéaire à la course de l'actionneur prismatique et le deuxième axe est perpendiculaire au premier et passe par le centre de la course de l'actionneur prismatique. La définition de la frontière de l'espace dextre de tous les types est alors simplifiée.

Définir la frontière de l'espace dextre de type A en premier aide à définir la frontière externe de tous les autres types puisqu'elle consiste des mêmes arcs et des mêmes droites. La figure 5.13 montre les angles et les dimensions qui servent à définir l'espace dextre d'une patte de type A. Dans toutes les figures de cette section, (a_i, b_i) dénotent les coordonnées des points représentant les positions minimale et maximale de l'actionneur prismatique redondant.

Il est à noter que r dans cette figure peut prendre la valeur de r_1 ou r_3 selon la classe de la patte sans redondance. Comme il est expliqué dans la section 5.3.1, une patte de classe 1 résulte toujours en une patte de type A. Dans ce cas, le rayon utilisé dans la figure 5.13 est r_1 . Par contre, il a été démontré que les pattes de toutes les classes peuvent résulter en un type A si la course de l'actionneur prismatique est suffisamment grande. Dans le cas des classes 2 et 3, le rayon utilisé dans la figure 5.13 est r_3 . Dans cette figure, l'angle β est l'angle de l'orientation de la course par rapport à un repère fixe. Les autres angles de cette figure sont définis comme suit :

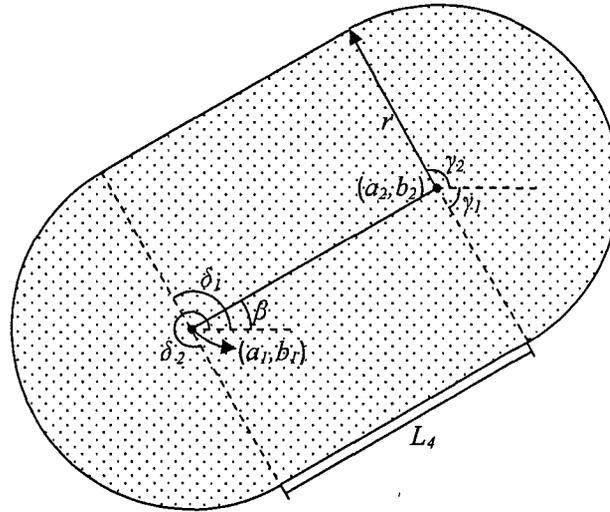


FIGURE 5.13 – Angles et dimensions d’une patte de type A

$$\delta_1 = \beta + \pi/2 \quad (5.18)$$

$$\delta_2 = \beta + 3\pi/2 \quad (5.19)$$

$$\gamma_1 = \beta - \pi/2 \quad (5.20)$$

$$\gamma_2 = \beta + \pi/2 \quad (5.21)$$

5.3.2 Espace dextre de type B

Un espace dextre de type B peut seulement être produit lorsque la patte sans redondance a un espace dextre de classe 2. Un espace dextre de ce type est illustré

à la figure 5.10(b). Puisque la condition dans laquelle un espace dextre de classe 2 résulte en un espace dextre de type A est définie dans l'inégalité (5.16), la condition pour qu'un espace dextre de classe 2 résulte en type B est simplement :

$$L_4 < 2r_2 \quad (5.22)$$

Frontières de l'espace dextre de type B

La frontière externe de l'espace dextre de type B est identique à celle du type A de la section 5.3.1 avec $r = r_3$. Par contre, une partie non-dextre de l'espace de travail définie par deux arcs symétriques se présente. Les angles nécessaires pour définir ces arcs sont illustrés à la figure 5.14. Dû aux axes de symétrie discutés dans la section 5.3.1, seulement un angle supplémentaire est à déterminer pour définir l'espace dextre. La figure 5.14 montre l'angle θ comme l'angle entre l'axe de l'actionneur prismatique et les points d'intersection des arcs de la partie non-dextre mesuré aux extrémités de la course de l'actionneur prismatique.

L'angle θ est défini par l'équation suivante :

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{L_4}{2r_2} \right) \quad (5.23)$$

Cet angle est combiné avec l'angle de l'axe de l'actionneur prismatique (β) pour donner l'angle du début et l'angle de la fin de chaque arc.

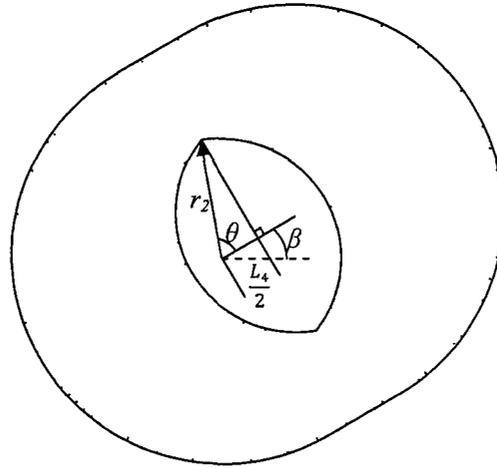


FIGURE 5 14 – Angles et dimensions d’une patte du type B

5.3.3 Espace dextre de type C

Un espace dextre de type C peut seulement être produit par un espace dextre de classe 3. Un exemple de ce type d’espace dextre est illustré à la figure 5.10(c). Dans cette figure, l’espace dextre créé par le rayon r_1 est complètement à l’intérieur de la partie non-dextre de l’espace de travail créé par le rayon r_2 . Afin que ce type se présente, ces deux parties ne doivent pas se toucher. La figure 5.15 illustre les conditions de l’espace dextre du type C.

Avec cette figure, il devient évident que ce type d’espace dextre se présente lorsque la condition suivante est respectée :

$$L_4 \leq r_2 - r_1 \quad (5.24)$$

Un espace dextre de type C est un peu plus simple à définir que les autres types provenant de la classe 3. Le cas où $L_4 = r_2 - r_1$, qui pourrait aussi être inclus dans

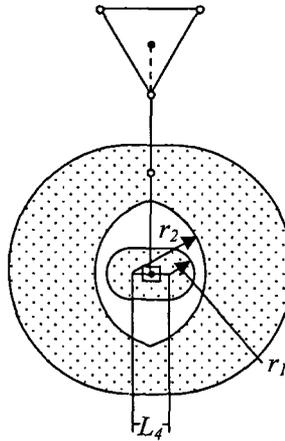


FIGURE 5.15 – Exemple d'espace dextre de type C d'une patte d'espace dextre de classe 3

le type D, est inclus ici dans le type C.

Frontières de l'espace dextre de type C

Les frontières de l'espace dextre de type C sont les mêmes que celles du type B mais avec une autre frontière qui délimite un espace dextre au centre de la partie non-dextre. Cet espace dextre au centre est de la même forme que l'espace dextre de type A avec $r = r_1$.

5.3.4 Espace dextre de type D

Un espace dextre de type D peut seulement être produit par un espace dextre de classe 3. Un exemple de ce type d'espace dextre est illustré à la figure 5.10(d). Ce type est caractérisé par le fait que la partie de l'espace dextre au centre et la partie définie par r_2 et r_3 se superposent. Un espace dextre de type E (voir fig 5.10(e)) est similaire à un type D mais les lignes et les arcs qui délimitent la frontière de l'espace

dextre différent d'un type à l'autre. La figure 5.16 illustre la différence de ces deux types et démontre les conditions du type D.

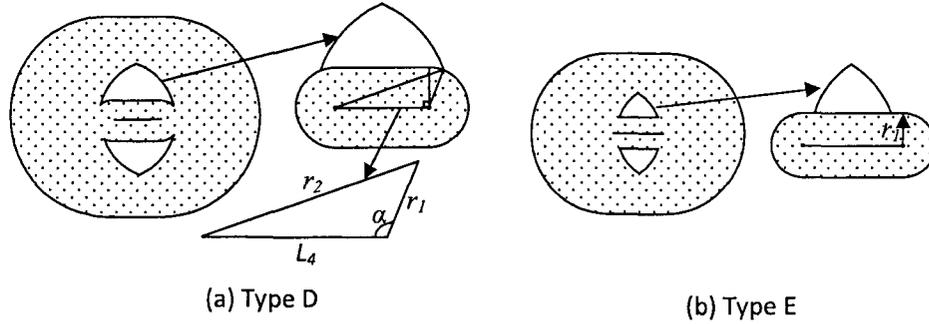


FIGURE 5.16 – Exemples d'espaces dextre des types D et E

D'après la figure 5.16(a), les arcs qui différencient le type D du type E disparaissent quand $\alpha = \pi/2$ rad. La valeur de L_4 qui donne un angle de $\pi/2$ rad est :

$$L_4 = \sqrt{r_2^2 - r_1^2} \quad (5.25)$$

D'ici, les conditions sur la course d'une patte de type D deviennent évidentes :

$$r_2 - r_1 < L_4 < \sqrt{r_2^2 - r_1^2} \quad (5.26)$$

Frontières de l'espace dextre de type D

La frontière interne de l'espace dextre de type D est la plus compliquée à définir car elle contient le plus grand nombre d'arcs et de droites. La figure 5.17 montre les angles et les dimensions nécessaires pour la définition de ce type d'espace.

L'angle α est le même que celui de la figure 5.16 et est défini à l'aide de la loi des cosinus :

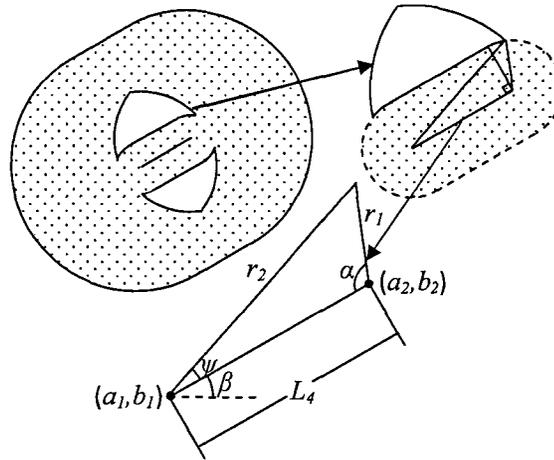


FIGURE 5.17 – Angles et dimensions d'une patte du type D

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{r_1^2 + L_4^2 - r_2^2}{2r_1 L_4} \right) \quad (5.27)$$

L'angle ψ est défini par la même loi :

$$\psi = \cos^{-1} \left(\frac{r_2^2 + L_4^2 - r_1^2}{2r_2 L_4} \right) \quad (5.28)$$

Tous les autres angles et dimensions sont définis dans les types précédents.

5.3.5 Espace dextre de type E

Comme c'est le cas pour les espaces dextres des types C et D, l'espace dextre de type E résulte d'une patte sans redondance qui a un espace dextre de classe 3. Un exemple de ce type d'espace dextre est illustré à la figure 5.10(e). Les conditions sur la course de l'actionneur prismatique pour un espace dextre de type D sont définies dans l'équation (5.26). La condition inférieure sur la course de l'actionneur

prismatique pour un espace dextre de type E est donc définie comme étant :

$$L_4 \geq \sqrt{r_2^2 - r_1^2} \quad (5.29)$$

La condition du type A pour une patte d'espace dextre de classe 3 est aussi définie dans l'équation (5.17). Ainsi, les conditions dans lesquelles une patte a un espace dextre de type E sont :

$$\sqrt{r_2^2 - r_1^2} \leq L_4 < 2\sqrt{r_2^2 - r_1^2} \quad (5.30)$$

Frontières de l'espace dextre de type E

Le type E est un peu plus facile à définir car les arcs supplémentaires du type D n'existent pas. La figure 5.18 démontre les paramètres nécessaires pour définir ce type d'espace.

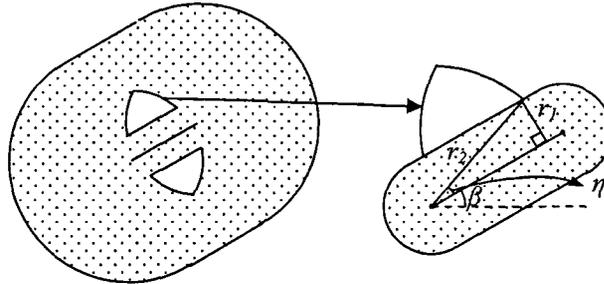


FIGURE 5.18 – Angles et dimensions d'une patte du type E

L'angle η est simplement défini par :

$$\eta = \sin^{-1} \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \quad (5.31)$$

Résumé des conditions

Dans cette section, plusieurs types d'espace dextre des pattes avec un actionneur prismatique redondant ont été identifiés. Selon la classe de l'espace dextre de la partie sans redondance de chaque patte, les conditions nécessaires pour chaque type diffèrent. Le tableau 5.5 résume les conditions de tous les types d'espace dextre des pattes PRRR et PRPR.

Tableau 5.5 – Conditions pour chaque type d'espace dextre

Type	Classe	Condition	Figure
	1	N/A	
A	2	$L_4 \geq 2r_2$	5.10(a)
	3	$L_4 \geq 2\sqrt{r_2^2 - r_1^2}$	
B	2	$L_4 < 2r_2$	5.10(b)
C	3	$L_4 \leq r_2 - r_1$	5.10(c)
D	3	$r_2 - r_1 < L_4 < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$	5.10(d)
E	3	$\sqrt{r_2^2 - r_1^2} \leq L_4 < 2\sqrt{r_2^2 - r_1^2}$	5.10(e)

5.4 Pattes RRRR et RRPR

Il a été vu au chapitre 3 que les architectures RRRR et RRPR sont basées sur les architectures sans redondance RRR et RPR. En plus, ces deux architectures avec redondance ont un DDL de redondance cinématique sous la forme d'un actionneur rotoïde ajouté à la base de chaque patte. Les architectures des pattes RRRR et RRPR sont illustrées à la figure 5.19.

D'une façon similaire aux pattes PRRR et PRPR, l'effet de l'ajout de l'actionneur redondant sur l'espace dextre des pattes sans redondance peut être étudié séparément

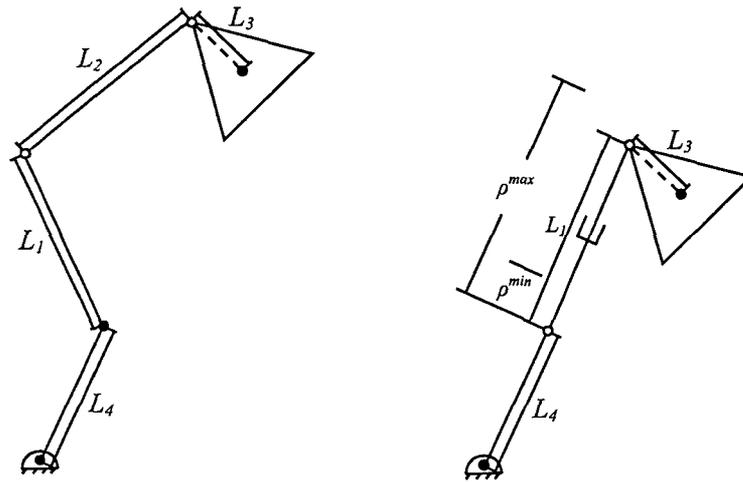


FIGURE 5.19 – Pattes avec redondance RRRR et RRPR

de l'étude de l'espace dextre des parties sans redondance. Dans le présent cas, l'actionneur redondant est une rotoïde actionnée. Dans la section 5.1, il a été vu que selon les dimensions de leurs membres, les pattes d'architecture RRR peuvent produire trois classes d'espace dextre définies par un, deux ou trois cercles concentriques. Dans la section 5.2, les trois mêmes classes ont été identifiées pour les pattes d'architecture RPR.

Dans la section 5.3, tous les types d'espace dextre des pattes PRRR et PRPR ont été présentés en ordre des types (type A à type E). Cependant, pour les pattes d'architectures RRRR et RRPR il est plus efficace de présenter l'espace dextre en ordre des classes d'espace dextre de leur partie sans redondance (RRR et RPR). Les différents types d'espace dextre seront alors présentés en ordre des classes qui les produisent, c'est-à-dire, de classe 1 à classe 3.

Afin de déterminer les types d'espace dextre des pattes RRRR et RRPR, il est important de bien comprendre l'effet de l'actionneur redondant. Cet effet est analogue

à celui de l'actionneur prismatique redondant des pattes PRRR et PRPR.

Dans les sections 5.1 et 5.2, il a été vu que le centre des classes d'espace dextre des parties sans redondance des pattes (RRR ou RPR) est situé à la base de la patte. Ce point est fixe lorsque la partie sans redondance est considérée séparément. Cependant, lorsque l'actionneur redondant est ajouté, le centre des classes d'espace dextre n'est plus fixe, il suit une trajectoire qui est simplement un cercle de rayon L_4 centré à la base de la patte avec redondance, c'est-à-dire, la position de l'actionneur redondant. L'effet de l'actionneur redondant est donc que l'espace dextre de la partie sans redondance est entraîné et étiré le long de cette trajectoire.

Les prochaines sections déterminent les types d'espace dextre qui sont possibles lorsque l'actionneur redondant est une rotoïde. Les types sont identifiés par un numéro qui désigne le nombre de cercles concentriques nécessaires pour les définir.

5.4.1 Espaces dextres qui résultent d'une patte RRR ayant un espace dextre de classe 1

En connaissant l'effet de l'actionneur redondant sur l'espace dextre des pattes, il est possible d'étudier l'espace dextre des pattes d'architectures RRRR et RRPR. Les pattes dont l'espace dextre de la partie sans redondance est de classe 1 sont étudiées en premier car les types d'espace dextre qui en résultent sont plus simples.

L'espace dextre des pattes RRRR et RRPR varie, non seulement selon la classe de l'espace dextre de la partie sans redondance, mais aussi selon la longueur L_4 . Plus L_4 est grand, plus l'espace dextre de la patte est grand. La figure 5.20 montre un exemple de l'espace dextre résultant lorsque la longueur L_4 est relativement courte.

L'espace dextre d'une telle patte est de type 1 car il est défini par un seul cercle. Il est à noter que dans les figures de cette section où l'espace dextre des pattes avec redondance est montré, le cercle pointillé représente la trajectoire du centre de l'espace dextre de la partie sans redondance. En plus, le petit cercle noir au centre de l'espace dextre est la position de la base de la patte avec redondance.

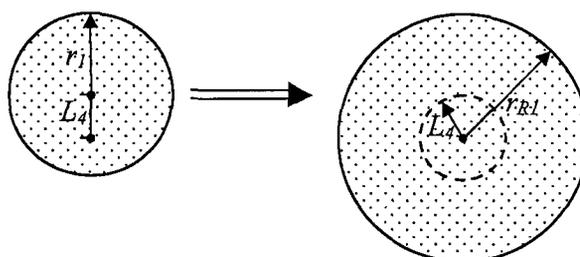


FIGURE 5.20 – Espace dextre d'une patte RRRR de classe 1 et de type 1

En fait, l'espace dextre résultant est de type 1 lorsque la condition suivante est respectée :

$$L_4 \leq r_1 \quad (5.32)$$

où, tel que présenté dans les sections 5.1 et 5.2, r_1 est le rayon du cercle définissant l'espace dextre de classe 1. Dans le présent cas, le rayon du cercle définissant l'espace dextre de la patte avec redondance est donné par :

$$r_{R1} = L_4 + r_1 \quad (5.33)$$

Par contre, lorsque la longueur L_4 ne respecte pas la condition (5.32), le centre de la trajectoire est à l'extérieur de l'espace dextre de classe 1. Dans un tel cas, la base de la patte n'est pas dans l'espace dextre. En effet, un cercle ayant un rayon

défini par l'équation suivante représente une limite interne de l'espace dextre :

$$r_{R0} = L_4 - r_1 \quad (5.34)$$

Avec cette équation, il est possible de voir que lorsque $L_4 \leq r_1$, le rayon r_{R0} est négatif ou nul, c'est-à-dire que la base est effectivement recouverte par l'espace dextre qui est alors de type 1 comme l'illustre la figure 5.20. La figure 5.21 illustre l'espace dextre résultant lorsque la condition (5.32) n'est pas respectée et l'espace dextre de la patte est de type 2.

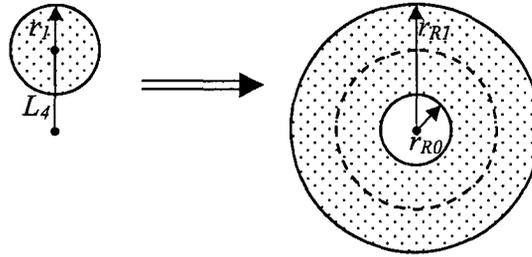


FIGURE 5.21 – Espace dextre d'une patte RRRR de classe 1 et de type 2

Le tableau 5.6 résume les types, les conditions et les rayons résultants des pattes d'espace dextre de classe 1 suite à l'ajout de l'effet de l'actionneur redondant. Ce tableau indique aussi les figures qui illustrent chaque type.

Tableau 5.6 – Conditions et rayons des types d'espace dextre provenant de classe 1

Type	Condition	Rayon(s)	Figure
1	$L_4 \leq r_1$	$r_{R1} = L_4 + r_1$	5.20
2	$L_4 > r_1$	$r_{R0} = L_4 - r_1$ $r_{R1} = L_4 + r_1$	5.21

5.4.2 Espaces dextres qui résultent d'une patte RRR ayant un espace dextre de classe 2

Comme il a été vu dans la section 5.1, les espaces dextres de classe 2 sont définis par deux cercles concentriques. Le cercle le plus petit, de rayon r_2 , définit la limite interne de l'espace dextre et le cercle le plus grand, de rayon r_3 , en définit la limite externe. Il a été vu dans la section précédente que la limite externe de l'espace dextre s'agrandit lorsque la longueur L_4 s'allonge. Le nouveau rayon externe est donc :

$$r_{R3} = r_3 + L_4 \quad (5.35)$$

Puisque l'actionneur redondant a pour effet d'étirer l'espace dextre sur sa trajectoire, la limite inférieure se rapetisse lorsque la longueur L_4 augmente. Pour une longueur L_4 courte, le rayon de la limite interne de l'espace dextre est alors :

$$r_{R2} = r_2 - L_4 \quad (5.36)$$

La figure 5.22 montre un exemple de l'espace dextre de type 2 obtenu lorsque la longueur L_4 respecte la condition suivante :

$$L_4 < r_2 \quad (5.37)$$

Des équations (5.36) et (5.37), il peut être vu que lorsque la condition (5.37) n'est pas respectée, le rayon r_{R2} est nul ou négatif. Dans un tel cas, l'espace dextre résultant est de type 1 comme montré à la figure 5.23. Cependant, il y a une deuxième condition à considérer pour un espace dextre de type 1, une semblable à la condition

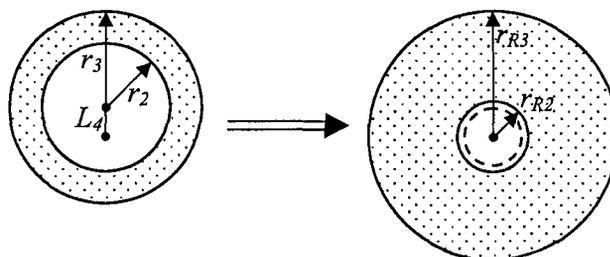


FIGURE 5.22 – Espace dextre d'une patte RRRR de classe 2 et de type 2

(5.32). Le cercle définissant la limite supérieure de l'espace dextre de classe 2 a un rayon de r_3 et non r_1 . La condition supérieure pour un espace dextre de type 1 est alors la suivante :

$$L_4 \leq r_3 \quad (5.38)$$

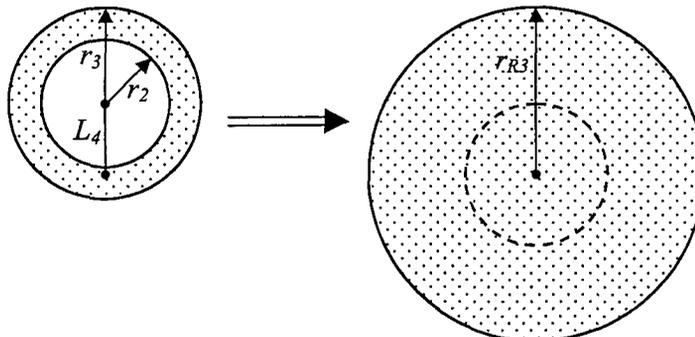


FIGURE 5.23 – Espace dextre d'une patte RRRR de classe 2 et de type 1

Lorsque la longueur L_4 est supérieure à r_3 , une limite interne se manifeste et délimite une partie non-dextre à la base de la patte ayant un rayon défini comme suit :

$$r_{R0} = L_4 - r_3 \quad (5.39)$$

Il est à noter que la définition de ce rayon n'est pas la même que celle de l'équation (5.34). Un espace dextre de type 2 comme illustré à la figure 5.24 se manifeste lorsque la condition (5.38) n'est pas respectée

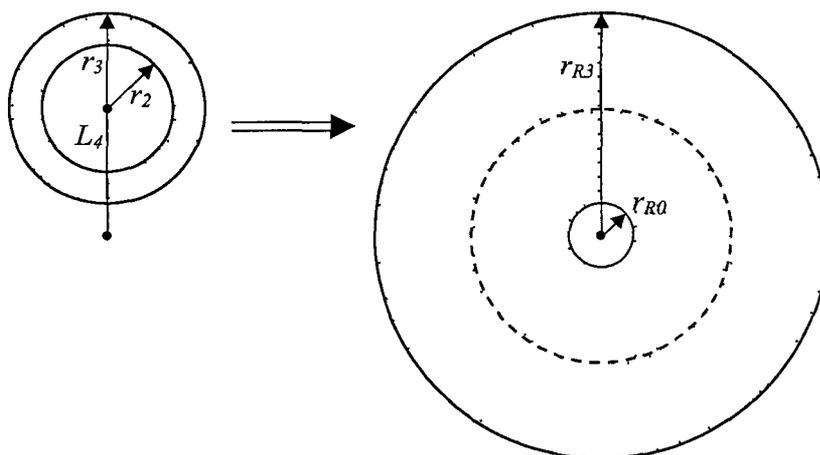


FIGURE 5.24 – Espace dextre d'une patte RRRR de classe 2 et de type 2

Le tableau 5.7 résume les types, les conditions et les rayons résultants des pattes d'espace dextre de classe 2 suite à l'ajout de l'effet de l'actionneur redondant. Ce tableau indique aussi les figures qui illustrent chaque type.

5.4.3 Espaces dextres qui résultent d'une patte RRR ayant un espace dextre de classe 3

L'espace dextre de classe 3 peut être vu comme la combinaison des classes 1 et 2. Cette classe est définie par trois cercles concentriques et dû à ce troisième cercle, les

Tableau 5.7 – Conditions et rayons de tous les types d'espace dextre provenant de classe 2

Type	Condition	Rayon(s)	Figure
2	$L_4 < r_2$	$r_{R2} = r_2 - L_4$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.22
1	$r_2 \leq L_4 \leq r_3$	$r_{R3} = L_4 + r_3$	5.23
2	$L_4 > r_3$	$r_{R0} = L_4 - r_3$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.24

espaces dextres qui résultent de telles pattes sont plus complexes à étudier. En fait, l'espace dextre de classe 3 peut être divisé en deux parties. Une partie résulte du cercle de rayon r_1 et l'autre partie résulte de la région comprise entre les rayons r_2 et r_3 . Dorénavant, la partie qui résulte du cercle de rayon r_1 sera nommée la partie I (interne) et l'autre partie sera nommée la partie X (externe). Ceci est illustré à la figure 5.25.

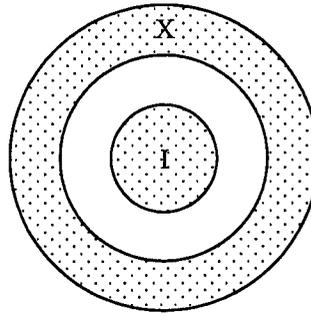


FIGURE 5.25 – Les deux parties de l'espace dextre de classe 3

Premièrement, lorsque la longueur L_4 est très courte, un espace dextre de type 3 en résulte. Dans un tel cas, la partie I est de type 1 et la partie X est de type 2. En plus, la limite interne de la partie X est plus grande que la limite externe de la partie I.

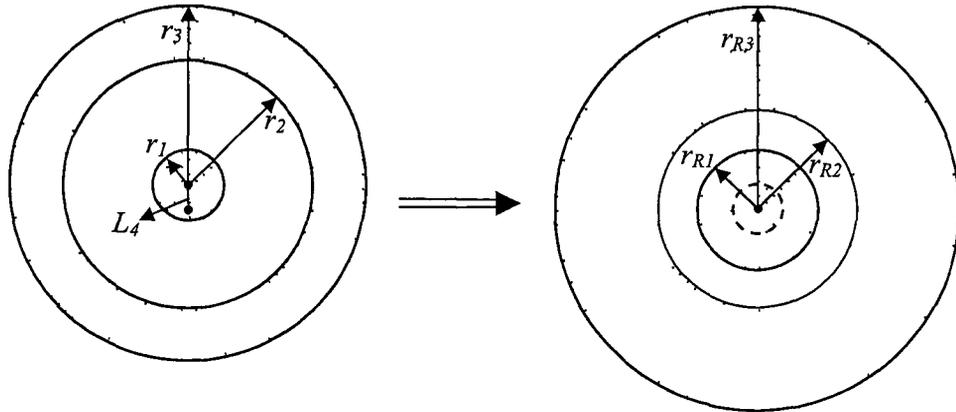


FIGURE 5.26 – Espace dextre d'une patte RRRR de classe 3 et de type 3

Les rayons des cercles de ce type d'espace dextre sont définis par :

$$r_{R1} = L_4 + r_1 \text{ (section 5.4.1)}$$

$$r_{R2} = r_2 - L_4 \text{ (section 5.4.2)} \quad (5.40)$$

$$r_{R3} = L_4 + r_3 \text{ (section 5.4.2)}$$

Lorsque la longueur L_4 augmente, un des cas suivants se produit avant l'autre :

1. Les parties I et X se fusionnent ($r_{R1} \geq r_{R2}$)
2. La partie I devient de type 2

Avec l'équation (5.40), on connaît les rayons r_{R1} et r_{R2} . De la définition de ces deux rayons, I et X se fusionnent lorsque la condition suivante est respectée :

$$L_4 \geq \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) \quad (5.41)$$

De la section 5.4.1, on sait que la condition pour que la partie I devienne de type 2 est la suivante :

$$L_4 > r_1 \quad (5.42)$$

Donc, en augmentant la longueur L_4 , le fusionnement des deux parties se passe avant que la partie I devienne de type 2 si la condition (5.41) est respectée avant la condition (5.42), c'est-à-dire, si la condition suivante est respectée :

$$\left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) < r_1 \quad (5.43)$$

ou

$$r_2 < 3r_1 \quad (5.44)$$

Les types d'espace dextre qui résultent des pattes de classe 3 et les conditions dans lesquelles ils se manifestent seront différents selon que la condition de l'inégalité (5.44) est respectée ou non. Deux études distinctes sont donc nécessaires. Dorénavant, les pattes qui respectent la condition ci-haut seront dites de classe 3-1 et les pattes que ne la respecte pas seront dites de classe 3-2.

Espaces dextres des pattes de classe 3-1

Rappelons que pour ce type de patte, les parties I et X se fusionnent avant que la partie I devienne de type 2. Si la condition (5.41) n'est pas respectée, les parties I et X ne sont pas jointes et les pattes de classe 3-1 ont un espace dextre de type 3.

La condition est alors la suivante :

$$L_4 < \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) \quad (5.45)$$

Ce type est présenté au début de la section 5.4.3 et est illustré à la figure 5.26. Cependant, lorsque cette condition n'est pas respectée, l'espace dextre résultant est de type 1, c'est-à-dire qu'il y a fusionnement des parties I et X. Un exemple de ce type d'espace dextre est illustré à la figure 5.27.

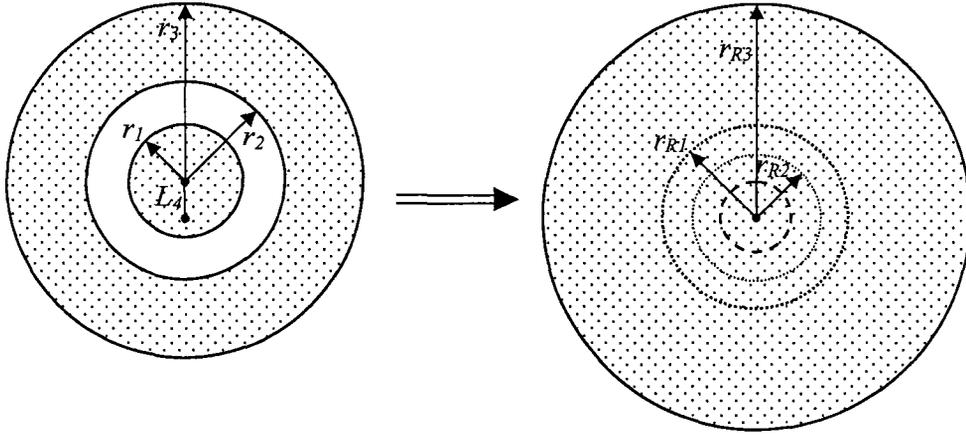


FIGURE 5.27 – Espace dextre de type 1 d'une patte RRRR de classe 3-1

Dans cette figure, il peut être vu que le rayon r_{R1} est plus grand que r_{R2} et alors la partie non-dextre entre les deux disparaît. Il a été vu dans la section 5.4.1 que la partie I devient de type 2 lorsque $L_4 > r_1$. La condition pour un espace dextre de type 1 est alors la suivante :

$$\left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right) \leq L_4 \leq r_1 \quad (5.46)$$

Lorsque la longueur L_4 est plus grande que r_1 , une limite inférieure se présente

car la partie I est de type 2. Dans ce cas, l'espace dextre de la patte avec redondance est, elle aussi, de type 2. La figure 5.28 illustre un exemple d'une patte de classe 3-1 et de type 2.

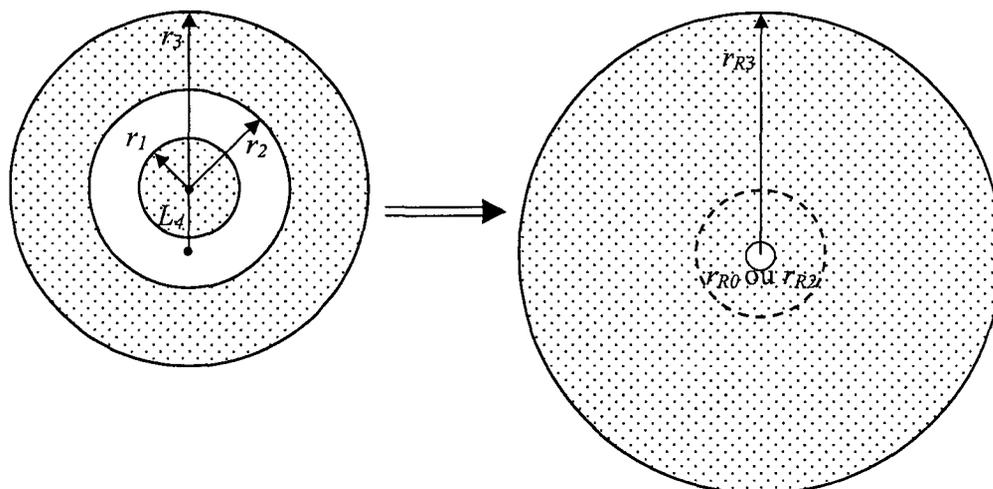


FIGURE 5.28 – Espace dextre de type 2 d'une patte RRRR de classe 3-1

Encore une fois, plus L_4 est grand, plus le rayon r_{R0} au centre s'agrandit. Celui-ci est défini par le suivant :

$$r_{R0} = L_4 - r_1 \quad (5.47)$$

Il est important de noter que même si les parties I et X ont fusionné, les rayons r_{R1} et r_{R2} continuent à évoluer. À partir du fusionnement, le rayon r_{R1} ne servira jamais comme limite de l'espace dextre car il sera toujours supérieur au rayon r_{R2} mais aussi toujours inférieur au rayon r_{R3} . Par contre, le rayon r_{R2} évolue dans le sens contraire des autres, c'est-à-dire, plus L_4 est grand, plus le rayon r_{R2} diminue comme on peut le voir à l'équation (5.40). Selon les équations (5.40) et (5.47), les

rayons r_{R0} et r_{R2} sont égaux lorsque $L_4 = \left(\frac{r_2+r_1}{2}\right)$. Il est donc possible que le rayon r_{R2} soit inférieur au rayon r_{R0} . Dans un tel cas, la limite interne de l'espace dextre est définie par le rayon r_{R2} . Le rayon r_{R0} définit la limite interne quand la condition suivante est respectée :

$$r_1 < L_4 < \left(\frac{r_2+r_1}{2}\right) \quad (5.48)$$

et r_{R2} définit la limite interne lorsque la condition suivante est respectée .

$$\left(\frac{r_2+r_1}{2}\right) \leq L_4 < r_2 \quad (5.49)$$

Lorsque L_4 est plus grand que r_2 , le rayon r_{R0} est nul et la partie non-dextre disparaît. L'espace dextre est alors de type 1 encore une fois. Un exemple d'un espace dextre de ce type est illustré à la figure 5.29

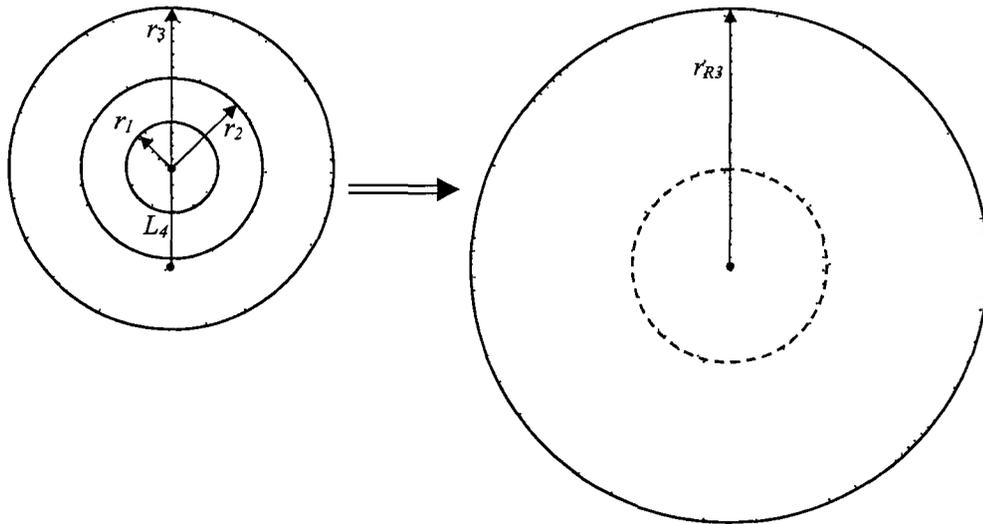


FIGURE 5.29 – Espace dextre de type 1 d'une patte RRRR de classe 3-1

Une partie non-dextre se manifeste lorsque la partie X redevient de type 2, c'est-à-dire, lorsque la condition (5.38) n'est pas respectée. Un espace dextre de type 2 est alors à nouveau le résultat qui est le même que dans la figure 5.24 de la section 5.4.2. Les définitions des rayons des limites interne et externe sont aussi les mêmes.

Le tableau 5.8 résume tous les types, les conditions et les rayons qui résultent des pattes de classe 3-1. Il est à noter que la définition de r_{R0} de la figure 5.28 n'est pas la même que celle de la figure 5.24.

Tableau 5.8 – Conditions et rayons de tous les types d'espace dextre provenant de pattes de classe 3-1

Type	Condition	Rayon(s)	Figure
3	$L_4 < \left(\frac{r_2-r_1}{2}\right)$	$r_{R1} = L_4 + r_1$ $r_{R2} = r_2 - L_4$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.26
1	$\left(\frac{r_2-r_1}{2}\right) \leq L_4 \leq r_1$	$r_{R3} = L_4 + r_3$	5.27
2	$r_1 < L_4 < \left(\frac{r_2+r_1}{2}\right)$	$r_{R0} = L_4 - r_1$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.28
2	$\left(\frac{r_2+r_1}{2}\right) \leq L_4 < r_2$	$r_{R2} = r_2 - L_4$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.28
1	$r_2 \leq L_4 \leq r_3$	$r_{R3} = L_4 + r_3$	5.29
2	$L_4 > r_3$	$r_{R0} = L_4 - r_3$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.24

Espaces dextres des pattes de classe 3-2

Les pattes de classe 3-2, c'est-à-dire les pattes qui ne respectent pas la condition (5.44) et pour lesquelles la partie I devient de type 2 avant que les parties I et X se fusionnent, ont des types d'espace dextre différents de ceux des pattes de classe 3-1. Cependant, lorsque la longueur L_4 est très courte, l'espace dextre résultant est de type 3 comme c'est le cas des pattes de classe 3-1. Les définitions des rayons sont

aussi les mêmes que celles pour les pattes de classe 3-1. Le seul changement est la condition selon laquelle l'espace dextre n'est plus de type 3. Cette condition est la suivante :

$$L_4 > r_1 \quad (5.50)$$

Ce type a été présenté au début de la section 5.4.3. Lorsque cette condition est respectée et la partie I devient de type 2, une partie non-dextre à la base de la patte se présente. Cette fois, les parties I et X ne sont pas encore fusionnées, c'est-à-dire, l'espace dextre dans de telles conditions est défini par quatre cercles concentriques et est dit de type 4. Un exemple de ce type d'espace dextre est illustré à la figure 5.30.

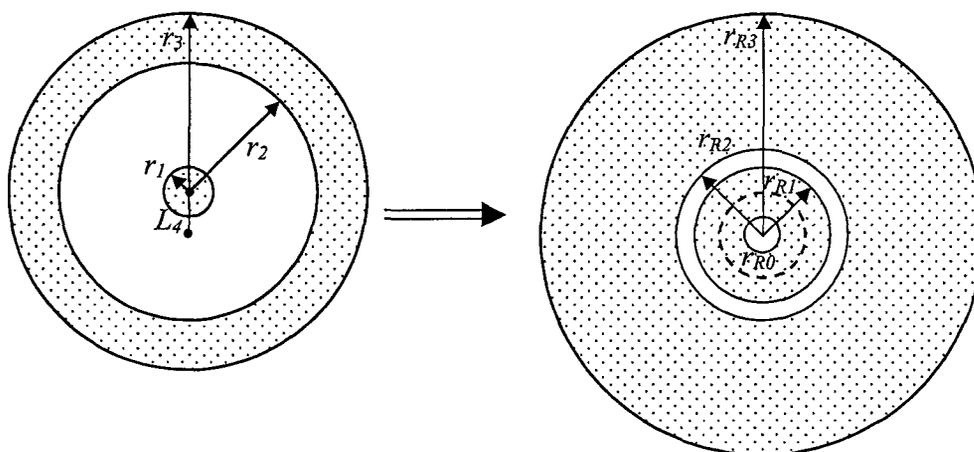


FIGURE 5.30 – Espace dextre de type 4 d'une patte RRRR de classe 3-2

Les rayons des cercles dans cette figure sont les suivants :

$$r_{R0} = L_4 - r_1$$

$$\begin{aligned}
 r_{R1} &= L_4 + r_1 \\
 r_{R2} &= r_2 - L_4 \\
 r_{R3} &= L_4 + r_3
 \end{aligned}
 \tag{5.51}$$

Lorsque les parties I et X se fusionnent, l'espace dextre change de type et devient alors de type 2. La condition pour un espace dextre de type 4 est alors la suivante :

$$r_1 < L_4 < \left(\frac{r_2 - r_1}{2} \right)
 \tag{5.52}$$

Les pattes avec une longueur L_4 supérieure ou égale à $\frac{r_2 - r_1}{2}$ ont alors un espace dextre de type 2. Un exemple de ce cas est illustré à la figure 5.31.

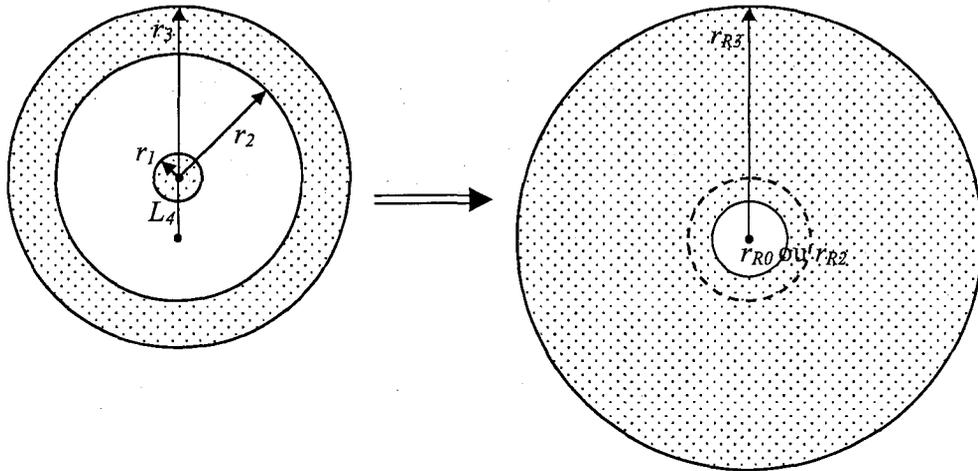


FIGURE 5.31 – Espace dextre de type 2 d'une patte RRRR de classe 3-2

Les autres types d'espace dextre et les conditions associées sont les mêmes que pour les pattes de classe 3-1. Le tableau 5.9 résume les types, les conditions et les rayons des espaces dextres qui résultent des pattes de classe 3-2. Encore une fois, la

définition du rayon r_{R0} de la figure 5.31 n'est pas la même que celle de la figure 5.24.

Tableau 5.9 – Conditions et rayons de tous les types d'espace dextre provenant des pattes de classe 3-2

Type	Condition	Rayon(s)	Figure
3	$L_4 \leq r_1$	$r_{R1} = L_4 + r_1$ $r_{R2} = r_2 - L_4$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.26
4	$r_1 < L_4 < \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)$	$r_{R0} = L_4 - r_1$ $r_{R1} = L_4 + r_1$ $r_{R2} = r_2 - L_4$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.30
2	$\left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right) \leq L_4 < \left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)$	$r_{R0} = L_4 - r_1$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.31
2	$\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right) \leq L_4 < r_2$	$r_{R2} = r_2 - L_4$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.31
1	$r_2 \leq L_4 \leq r_3$	$r_{R3} = L_4 + r_3$	5.29
2	$L_4 > r_3$	$r_{R0} = L_4 - r_3$ $r_{R3} = L_4 + r_3$	5.24

Chapitre 6

Espace dextre des manipulateurs

Une fois que l'espace dextre de chacune des pattes d'un manipulateur est déterminé et que les frontières sont définies, les prochaines étapes de la détermination de l'espace dextre des manipulateurs parallèles plans avec redondance cinématique peuvent être exécutées. Ces étapes ont été présentées au chapitre 4. Les prochaines sections définissent les espaces dextres des manipulateurs étudiés. Premièrement, les points d'intersection des frontières des espaces dextres des pattes sont calculés. Ensuite, les segments de droites et d'arcs qui font partie des frontières de l'espace dextre de chaque manipulateur sont identifiés. Le calcul de l'aire de l'espace dextre est ensuite effectué et des résultats sont finalement présentés. Les résultats ont été obtenus en utilisant un algorithme codé en langage MATLAB suivant la méthode présentée dans ce travail.

6.1 Espace dextre des manipulateurs n -PRRR et n -PRPR

Les pattes d'architectures PRRR et PRPR ont un espace dextre de forme identique. En effet, les mêmes cinq types d'espace dextre ont été identifiés. Par conséquent, les espaces dextres des manipulateurs n -PRRR et n -PRPR peuvent être déterminés de la même façon. Il est à noter que des manipulateurs composés à la fois de pattes d'architecture PRRR et d'architecture PRPR ont un espace dextre qui peut être déterminé par la méthode présentée dans cette section, c'est-à-dire des manipulateurs hybrides d'architecture m -PRRR- n -PRPR. L'espace dextre d'un manipulateur n -PRRR et n -PRPR est l'intersection de l'espace dextre de toutes ses pattes.

6.1.1 Intersection des frontières et segmentation des arcs et des droites

L'étape 2 de la méthode utilisée pour obtenir l'espace dextre des manipulateurs parallèles plans est la détermination de l'intersection des frontières de l'espace dextre de chacune de ses pattes. Puisque les frontières de l'espace dextre des pattes PRRR et PRPR consistent d'arcs et de droites, la méthode dans la section 4.2 peut être utilisée pour trouver tous les points d'intersection entre tous les arcs et les droites des frontières de chaque patte. Il est à noter que les points d'intersection de chaque arc et de chaque droite avec tous les arcs et les droites de toutes les pattes doivent être identifiés.

Tel qu'expliqué dans la section 4.3, une fois que tous les points d'intersection sont identifiés, ceux-ci peuvent être triés. Les arcs et les droites peuvent ensuite être segmentés à ces points.

6.1.2 Frontières de l'espace dextre des manipulateurs

Une fois que tous les arcs et les droites ont été segmentés, une liste d'arcs et de droites peut être établie pour chaque patte du manipulateur. Afin de déterminer quel segment fait partie de l'espace dextre du manipulateur, il ne reste qu'à identifier lesquels de ceux-ci sont à l'intérieur de l'espace dextre de toutes les pattes dont ils ne proviennent pas. Puisqu'un segment fait, par définition, partie de la frontière de la patte d'où il provient, il n'est pas nécessaire de vérifier s'il est dans son espace dextre. Pour cette raison, il est important d'avoir une différente liste pour chaque patte.

Puisque les pattes PRRR et PRPR ont un espace dextre de la même forme, la méthode pour déterminer si un segment est à l'intérieur de l'espace dextre est la même. Premièrement, des types définis dans la section 5.3, il peut être vu que l'espace dextre peut contenir jusqu'à trois régions. La figure 6.1(a) illustre ces trois régions. La région la plus centrale est définie par r_1 , une région non-dextre est définie par r_2 et la région la plus grande est définie par r_3 . Dans la figure 6.1(b), les composantes des régions définies par r_1 ou r_3 , qui ont la même forme, sont illustrées. Les régions définies par r_1 et r_3 sont composées de deux cercles et d'un rectangle. Un point quelconque est dans cette région s'il est dans un des cercles ou dans le rectangle. Il est à noter qu'un point peut être dans les deux cercles et le rectangle en même

temps.

La figure 6.1(c) illustre les composantes de la région définie par r_2 . La région définie par r_2 est simplement l'intersection de deux cercles et délimite une partie non-dextre. Un point est dans cette région s'il est dans ces deux cercles en même temps. La définition de ces régions est importante pour déterminer si un segment est à l'intérieur de l'espace dextre d'une patte ou non.

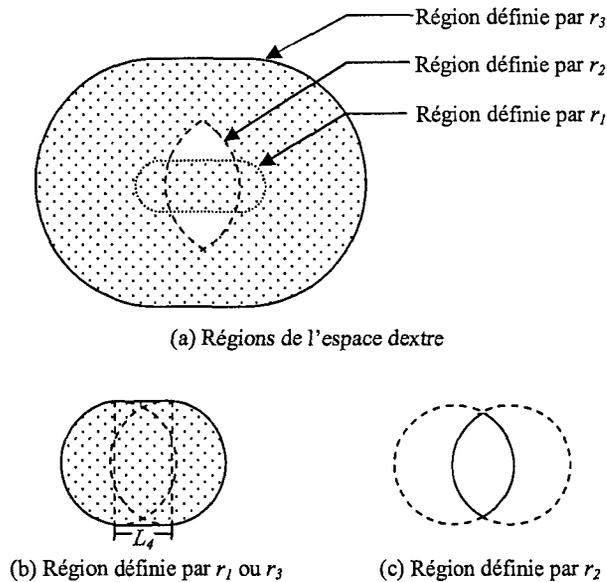


FIGURE 6.1 – Régions qui définissent l'espace dextre d'une patte PRRR ou PRPR

Un espace dextre de type A est simplement une région définie par r_1 ou r_3 . Un point quelconque est dans un espace dextre de type A s'il est dans cette région.

Un espace dextre de type B contient une région définie par r_3 et une région définie par r_2 . Un point est dans un espace dextre de type B s'il est dans la région définie par r_3 mais non dans celle définie par r_2 .

Les espaces dextres de types C, D et E contiennent les trois régions tel que montré

dans la figure 6.1(a). Un point est dans un espace dextre de ces types s'il est dans la région définie par r_1 ou s'il est dans la région définie par r_3 et non dans la région définie par r_2 . Il est à noter qu'un point qui est dans la région définie par r_2 peut être dans l'espace dextre s'il est aussi dans la région définie par r_1 .

Comme il est expliqué dans la section 4.4, seulement un point sur le segment a besoin d'être vérifié pour déterminer si le segment est dans l'espace dextre des pattes dont il ne provient pas. Il a aussi été vu que le point au centre du segment est utilisé afin d'éviter des erreurs. Les coordonnées du point au centre de chaque segment sont donc calculées pour ensuite vérifier s'il est à l'intérieur de l'espace dextre de toutes les autres pattes. Les segments qui sont à l'intérieur de l'espace dextre de toutes les autres pattes font alors partie de la frontière de l'espace dextre du manipulateur. Une liste finale de tous les segments de la frontière de l'espace dextre peut ensuite être établie.

6.1.3 Aire de l'espace dextre

Avec la liste des segments qui forment la frontière de l'espace dextre, l'aire de l'espace dextre peut être obtenue par intégration. Tel qu'expliqué dans la section 4.5, le théorème de la divergence de Gauss peut être utilisé pour intégrer le long des frontières de l'espace dextre. Chaque segment peut être intégré séparément et les contributions de tous les segments peuvent être additionnées pour calculer l'aire de l'espace dextre. Puisque les segments qui délimitent les frontières de l'espace dextre des manipulateurs n -PRRR et n -PRPR sont des arcs et des droites, la méthode présentée dans la section 4.5 peut être employée telle que présentée.

6.1.4 Exemples d'espace dextre des manipulateurs n-PRRR et n-PRPR

Afin de démontrer des applications de la méthode présentée appliquée aux manipulateurs n-PRRR et n-PRPR, deux exemples de manipulateurs n-PRRR et leur espace dextre sont présentés. Des espaces dextres semblables se présentent pour des manipulateurs n-PRPR. Pour aussi démontrer que la méthode fonctionne avec des manipulateurs avec n'importe quel nombre de pattes, les espaces dextres d'un manipulateur à trois pattes et d'un manipulateur à quatre pattes sont présentés. Le premier manipulateur est un manipulateur à trois pattes et est illustré à la figure 6.2.

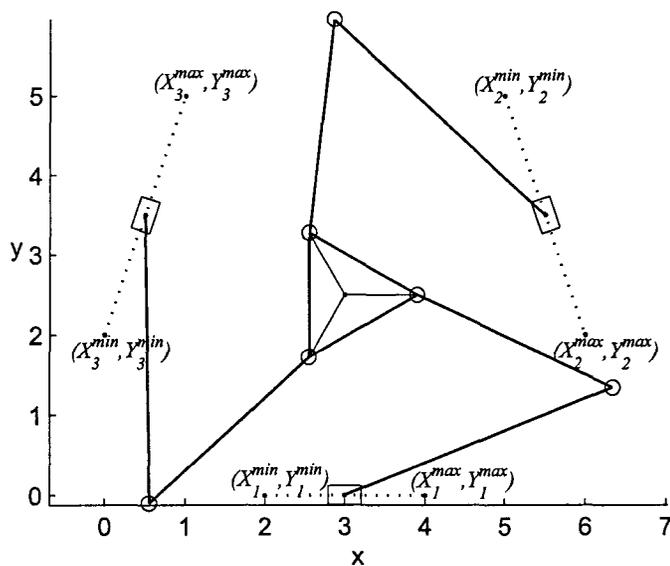


FIGURE 6.2 – Exemple d'un manipulateur 3-PRRR

Les dimensions de chaque patte de ce manipulateur sont présentées dans le tableau 6.1 où (X^{min}, Y^{min}) et (X^{max}, Y^{max}) sont, respectivement, les coordonnées de

la limite inférieure et de la limite supérieure de l'actionneur prismatique de chaque patte. L_1 , L_2 et L_3 sont les longueurs des membres de chaque patte à partir de l'actionneur prismatique jusqu'à l'organe terminal, tel que présenté dans la section 3.3. Le type d'espace dextre de chaque patte est aussi présenté dans ce tableau. En utilisant la méthode présentée dans ce travail, il peut être démontré que chaque patte de ce manipulateur a un espace dextre de type B. La géométrie de l'espace dextre du manipulateur est montrée à la figure 6.3. Il est à noter que les dimensions et les coordonnées peuvent être n'importe quelle unité de longueur et que l'aire indiquée dans ce qui suit représente l'unité de longueur au carré. En utilisant le théorème de la divergence de Gauss, l'aire de l'espace dextre de ce manipulateur peut être calculée : $A = 31,77$.

Tableau 6.1 – Dimensions de l'exemple d'un manipulateur 3-PRRR

	patte		
	1	2	3
L_1	3,6	3,6	3,6
L_2	2,7	2,7	2,7
L_3	0,9	0,9	0,9
(X^{min}, Y^{min})	(2, 0)	(5, 5)	(0, 2)
(X^{max}, Y^{max})	(4, 0)	(6, 2)	(1, 5)
Type	B	B	B

Le deuxième manipulateur est un manipulateur à quatre pattes et est illustré à la figure 6.4. Les dimensions de chaque patte de ce manipulateur sont présentées dans le tableau 6.2. Le type d'espace dextre de chaque patte de ce manipulateur est présenté dans le tableau 6.2. La géométrie de l'espace dextre du manipulateur est montrée à la figure 6.5. En utilisant le théorème de la divergence de Gauss, l'aire de l'espace dextre de ce manipulateur peut être calculée et donne le résultat suivant :

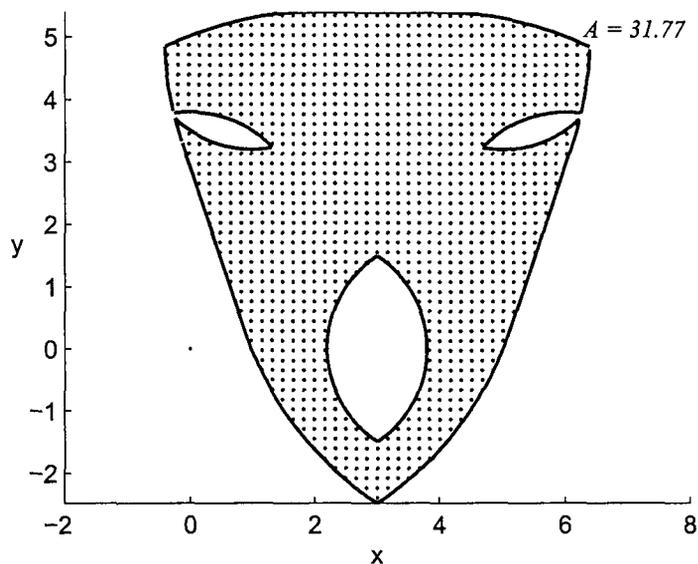


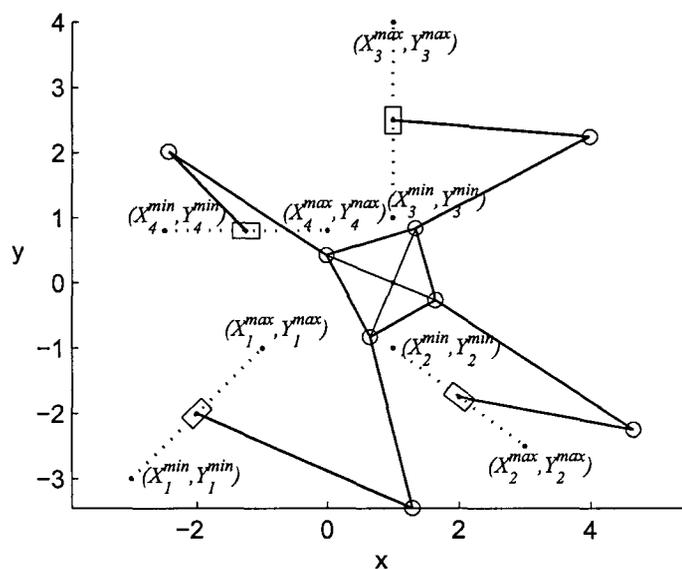
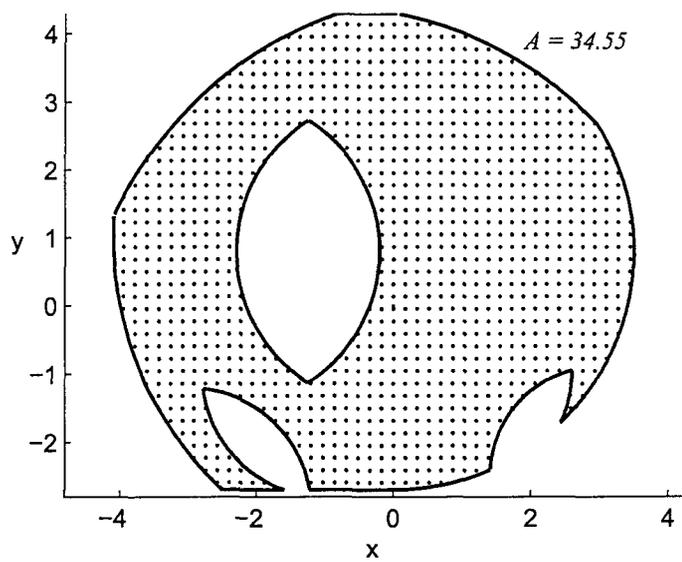
FIGURE 6.3 – Espace dextre de l'exemple d'un manipulateur 3-PRR

$A = 34,55$.

Tableau 6.2 – Dimensions de l'exemple d'un manipulateur 4-PRR

	patte			
	1	2	3	4
L_1	3,6	2,7	3	1,7
L_2	2,7	3,6	3	2,9
L_3	0,9	0,7	0,9	1,1
(X_i^{min}, Y_i^{min})	(-3, -3)	(1, -1)	(1, 1)	(-2,5, 0,8)
(X_i^{max}, Y_i^{max})	(-1, -1)	(3, -2,5)	(1, 4)	(0, 0,8)
Type	B	B	A	B

Les figures 6.3 et 6.5 illustrent que la méthode peut être appliquée à des manipulateurs avec avec n'importe quel nombre de pattes. Elles illustrent aussi que les parties non-dextres à l'intérieur de l'espace dextre sont identifiables.

FIGURE 6.4 – Exemple d'un manipulateur 4-PRRRFIGURE 6.5 – Espace dextre de l'exemple d'un manipulateur 4-PRRR

6.2 Espace dextre des manipulateurs n -RRRR et n -RRPR

L'espace dextre d'un manipulateur d'architecture n -RRRR ou n -RRPR est l'intersection de l'espace dextre de toutes ses pattes. L'espace dextre des pattes d'architectures RRRR et RRPR ainsi que la définition des frontières ont été présentés dans la section 5.4. Dans la présente section, la méthode pour déterminer les frontières et l'aire de l'espace dextre des manipulateurs d'architectures n -RRRR et n -RRPR est présentée. Des exemples sont aussi présentés pour démontrer des applications de la méthode.

6.2.1 Intersection des frontières et segmentation des cercles

Cette section propose une simplification des étapes 2 et 3 de la méthode générale présentée dans les sections 4.2 et 4.3. Cette simplification peut s'appliquer à tout manipulateur dont l'espace dextre de chaque patte est composé uniquement de cercles.

Il est important de noter que la segmentation des cercles de l'espace dextre des manipulateurs d'architectures n -RRRR et n -RRPR peut être faite en utilisant la méthode présentée dans les sections 4.2 et 4.3 afin de généraliser la méthode pour tous les manipulateurs étudiés. Il suffit de considérer que les cercles sont des arcs de 0 à 2π radians. Cependant, il est aussi possible de modifier ces étapes de la méthode pour simplifier la détermination des points d'intersection et de la segmentation des frontières de l'espace dextre. L'augmentation de l'efficacité d'une telle modification provient des deux faits suivants :

1. Il n'est pas nécessaire de vérifier si les points d'intersection potentiels sont sur les arcs puisque les cercles qui définissent les frontières sont complets.
2. Il n'y a que des cercles et non des arcs et des droites.

Premièrement, la détermination des points d'intersection peut être simplifiée par le fait qu'il n'y a que des cercles. Deux cercles se croisent si :

$$d \leq r_1 + r_2 \quad (6.1)$$

et

$$d \geq |r_1 - r_2| \quad (6.2)$$

où d est la distance entre le centre des deux cercles et r_1 et r_2 sont les rayons des deux cercles. L'intersection de deux cercles est illustrée à la figure 6.6.

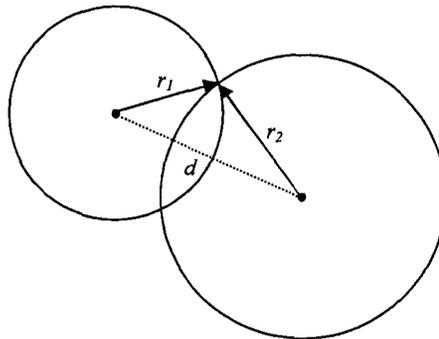


FIGURE 6.6 – Points d'intersection de deux cercles

Si les deux côtés d'une des conditions des équation (6.1) et (6.2) s'égalisent, un seul point d'intersection est identifié. Autrement, deux points d'intersection sont identifiés. La détermination des deux points d'intersection peut être faite de la même façon que la méthode pour deux arcs présentée dans la section 4.2.1. Cependant, il

n'est pas nécessaire de vérifier si les points sont sur l'arc.

Une fois que tous les points d'intersection de chaque cercle sont identifiés, la segmentation est faite en créant des arcs du premier point d'intersection au deuxième, du deuxième au troisième, et ainsi de suite jusqu'au dernier point d'intersection. Il y a également un arc du dernier point d'intersection jusqu'au premier pour compléter le cercle. Pour ceci, il suffit de prendre l'angle correspondant au dernier point et soustraire 2π . La figure 6.7 illustre la segmentation d'un cercle.

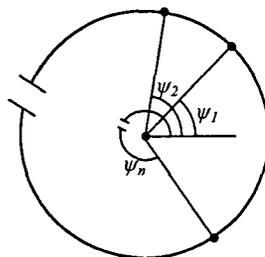


FIGURE 6.7 – Segmentation d'un cercle

Dans cette figure, ψ_i est l'angle correspondant au i ème point d'intersection. Il peut être vu que n segments d'arcs sont créés à partir de n points d'intersection.

6.2.2 Frontières de l'espace dextre des manipulateurs n -RRRR et n -RRPR

Une fois que tous les cercles des frontières de l'espace dextre de chaque patte ont été segmentés, il est possible de déterminer les frontières de l'espace dextre des manipulateurs. Premièrement, une liste de tous les segments est établie. Ensuite, il suffit de déterminer quels segments font partie des frontières de l'espace dextre. Puisque tous les segments sont des arcs et que l'espace dextre de chaque patte des

manipulateurs est défini par des cercles concentriques, la méthode pour déterminer quels segments font partie des frontières de l'espace dextre des manipulateurs est plus simple que celle pour les manipulateurs n-PRRR et n-PRPR.

Il faut vérifier si chaque segment fait partie des frontières de l'espace dextre ou non. Seulement un point sur le segment est vérifié afin de déterminer s'il est dans l'espace dextre de toutes les pattes dont il ne provient pas. Le point au centre du segment est choisi pour faire cette vérification.

Afin de déterminer si un point est dans l'espace dextre d'une patte, il faut premièrement connaître la forme de l'espace dextre de la patte. Il a été vu dans la section précédente que l'espace dextre de chaque patte d'architecture RRRR ou RRPR est défini par une série de cercles concentriques. Dans tous les types identifiés, les cercles de rayons r_0 ou r_2 définissent une limite interne de l'espace dextre, c'est-à-dire, les points à l'intérieur ne sont pas dans l'espace dextre. Les cercles de rayons r_1 ou r_3 définissent une limite externe de l'espace dextre où les points à l'intérieur sont dans l'espace dextre. En plus, les cercles de rayons inférieurs ont priorité sur les cercles de rayons supérieurs.

Il est donc choisi de vérifier les cercles de rayons inférieurs en premier et d'identifier le premier cercle dont le point fait partie. Ensuite, si le plus petit cercle à inclure le point définit une limite interne (rayon r_0 ou r_2), le point n'est pas dans l'espace dextre. Par contre, si le plus petit cercle à inclure le point définit une limite externe (rayon r_1 ou r_3), le point est dans l'espace dextre de cette patte. Évidemment, si le point n'est dans aucun cercle, il n'est pas dans l'espace dextre de cette patte. Un point est dans un cercle si sa distance par rapport au centre du cercle est inférieure au rayon du cercle.

6.2.3 Aire de l'espace dextre des manipulateurs n -RRRR et n -RRPR

Avec la liste des segments qui forment la frontière de l'espace dextre, l'aire de l'espace dextre peut être obtenue par intégration. Tel qu'expliqué dans la section 4.5, le théorème de la divergence de Gauss peut être utilisé pour intégrer le long des frontières de l'espace dextre. Chaque segment peut être intégré séparément et les contributions de tous les segments peuvent être additionnées pour calculer l'aire de l'espace dextre. Puisque les segments qui délimitent les frontières de l'espace dextre des manipulateurs n -RRRR et n -RRPR sont tous des arcs, la méthode présentée dans la section 4.5 peut être employée.

6.2.4 Exemples d'espaces dextres des manipulateurs n -RRRR et n -RRPR

Afin de démontrer des applications de la méthode présentée dans cette section, deux exemples de l'espace dextre de manipulateurs avec une articulation rotoïde comme redondance cinématique sont présentés. Le premier manipulateur est un manipulateur 3-RRRR et le deuxième est un manipulateur avec deux pattes RRRR ainsi que deux pattes RRPR afin de démontrer la polyvalence de la méthode. Le premier manipulateur est illustré à la figure 6.8.

Le tableau 6.3 présente les dimensions du manipulateur 3-RRRR illustré à la figure 6.8.

La figure 6.9 illustre l'espace dextre du manipulateur avec les dimensions du tableau 6.3. Ce manipulateur a un espace dextre ayant une aire de 24,11.

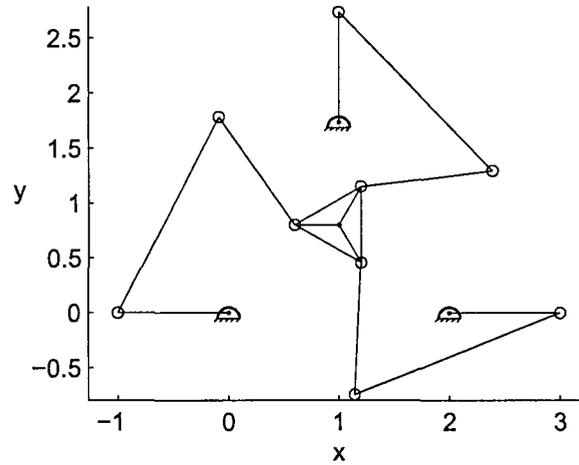


FIGURE 6.8 – Manipulateur 3-RRR

Tableau 6.3 – Dimensions du manipulateur 3-RRR de la figure 6.8

	Chaîne cinématique		
	1	2	3
Type	RRRR	RRRR	RRRR
L_1	2.00	2.00	2.00
L_2	1.20	1.20	1.20
L_3	0.40	0.40	0.40
L_4	1.00	1.00	1.00
(X_3, Y_3)	(0.00 , 0.00)	(1.00 , 1.73)	(2.00 , 0.00)

Le deuxième manipulateur est un manipulateur hybride 2-RRRR-2-RRPR, c'est-à-dire un manipulateur avec deux pattes RRRR et deux pattes RRPR. Ce manipulateur démontre bien la polyvalence de la méthode présentée. Celui-ci est illustré à la figure 6.10.

Le tableau 6.4 présente les dimensions du manipulateur 2-RRRR-2-RRPR illustré à la figure 6.10.

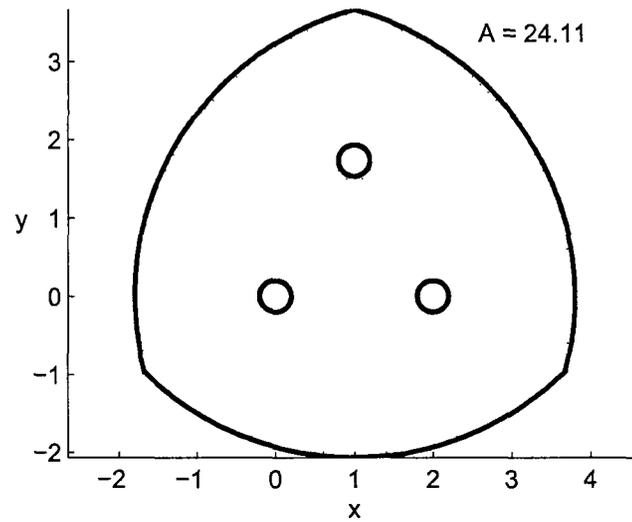


FIGURE 6.9 – Espace dextre du manipulateur 3-RRR de la figure 6.8

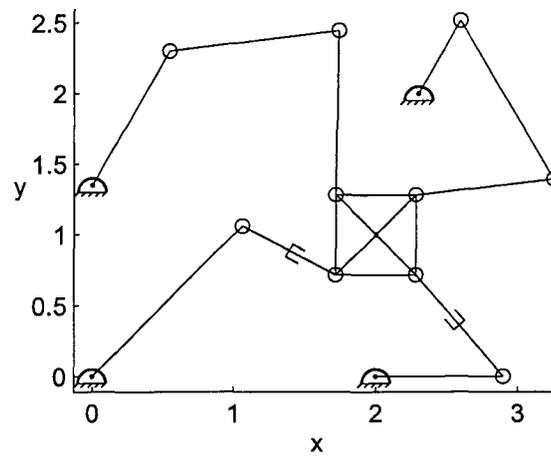
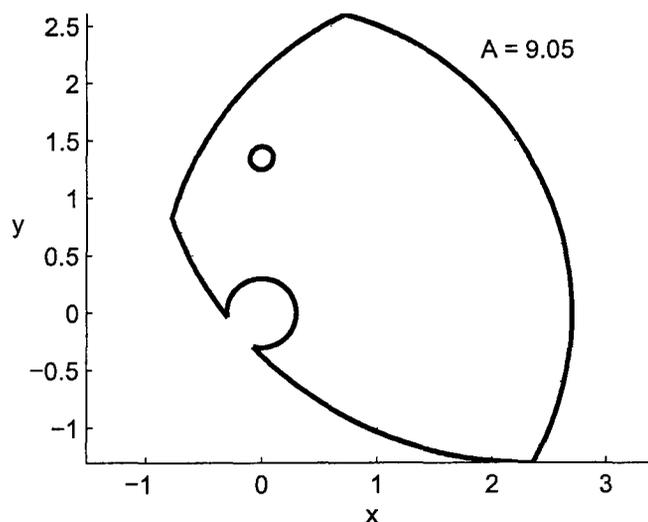


FIGURE 6.10 – Manipulateur 2-RRR-2-RRPR

Tableau 6.4 – Dimensions du manipulateur 2-RRRR-2-RRPR de la figure 6.10

Type	Chaîne cinématique			
	1	2	3	4
Type	RRRR	RRRR	RRPR	RRPR
L_1 ou L_1^{min}	2.00	1.80	0.20	0.50
L_2 ou L_1^{max}	1.20	1.30	2.40	1.60
L_3	0.40	0.40	0.40	0.40
L_4	1.10	0.60	0.90	1.50
(X_3, Y_3)	(0.00 , 1.35)	(2.30 , 2.00)	(2.00 , 0.00)	(0.00 , 0.00)

L'espace dextre du manipulateur 2-RRRR-2-RRPR de la figure 6.10, est présenté à la figure 6.11. Cet espace dextre a un espace dextre ayant une aire de 9,05.

FIGURE 6.11 – Espace dextre du manipulateur 2-RRRR-2-RRPR de la figure 6.10

Conclusion

Discussion des résultats

Dans ce travail, une méthode géométrique pour la détermination de l'espace dextre des manipulateurs parallèles plans avec redondance cinématique a été proposée. Cette méthode a été appliquée à quatre architectures de manipulateurs : les manipulateurs n-PRRR, les manipulateurs n-PRPR, les manipulateurs n-RRRR et les manipulateurs n-RRPR.

La méthode proposée se base sur le fait que l'effet de l'actionneur redondant peut être considéré séparément de l'étude de l'espace dextre de la partie sans redondance de chaque patte. Elle utilise l'analogie des mécanismes à quatre barres pour déterminer l'espace dextre des pattes basées sur l'architecture RRR. De la même façon, les positions extrêmes sont utilisées pour déterminer l'espace dextre des pattes basées sur l'architecture RPR. La méthode se base aussi sur le fait que l'espace dextre d'un manipulateur parallèle est l'intersection de l'espace dextre de chacune de ses pattes.

La méthode proposée est une méthode géométrique qui se base directement sur les dimensions des membres, le type d'architecture et les longueurs minimales et

maximales des articulations prismatiques s'il y en a. Elle fournit alors une solution exacte. En plus, cette méthode est visuelle, c'est-à-dire, le résultat de chaque étape de la méthode peut être visualisée graphiquement.

Résumé des contributions

La méthode proposée dans ce travail donne une solution exacte de l'aire de la surface de l'espace dextre et de ses frontières. Elle fournit les suivants :

- Une représentation géométrique de l'espace dextre de chaque patte.
- Une représentation géométrique de l'espace dextre des manipulateurs étudiés.
- La valeur de l'aire de l'espace dextre des manipulateurs étudiés.

La représentation géométrique de l'espace dextre de chaque patte apporte plusieurs avantages. Par exemple, il est plus facile de savoir quelle patte modifier pour augmenter l'espace dextre du manipulateur. Une représentation géométrique de l'espace dextre des manipulateurs donne de l'information sur la forme de l'espace dextre et non juste une valeur de l'aire. La représentation géométrique de l'espace dextre peut aussi être utile pour un algorithme d'optimisation pour un espace dextre prescrit.

Finalement, la valeur de l'aire est importante pour quantifier l'espace dextre. Cette quantité peut être utilisée comme fonction objective dans un algorithme d'optimisation. On peut ensuite facilement le comparer avec d'autres manipulateurs et optimiser la conception.

Travaux futurs

Pour bénéficier des avantages de la méthode présentée dans ce travail, c'est surtout dans des algorithmes d'optimisation qu'une différence de performance serait observée. Pour ceci, il serait intéressant de comparer la méthode présentée dans ce travail avec une méthode par discrétisation du point de vue de la performance d'un algorithme d'optimisation.

La méthode générale présentée dans le chapitre 4 peut s'appliquer à tous les manipulateurs parallèles plans. Il serait donc intéressant de l'appliquer à d'autres manipulateurs parallèles plans avec redondance cinématique.

Bibliographie

- BAJPAI, A. et ROTH, B. (1986). Workspace and Mobility of a Closed-Loop Manipulator. *International Journal of Robotics Research*, 5(2):131–142.
- BONEV, I. (2003). The True Origins of Parallel Robots. *The Parallel Mechanisms Information Center*, www.parallemic.org.
- BUCK, R. (1965). *Advanced Calculus*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Company.
- EBRAHIMI, I., CARRETERO, J. et BOUDREAU, R. (2008a). A Family of Kinematically Redundant Planar Parallel Manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 130: 062306–1 – 062306–8.
- EBRAHIMI, I., CARRETERO, J. et BOUDREAU, R. (2008b). Kinematic Analysis and Path Planning of a New Kinematically Redundant Planar Parallel Manipulator. *Robotica*, 26:405–413.
- FENG, G., YONG-SHENG, Z. et ZHI-HUI, Z. (1996). Physical Model of the Solution Space of 3-DOF Parallel Planar Manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 31(2):161–171.

- FICHTER, E. (1986). A Stewart Platform Based Manipulator : General Theory and Practical Construction. *International Journal of Robotics Research*, 5(2):157–182.
- GOSSELIN, C. (1990). Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators. *ASME Journal of Mechanical Design*, 112(3):331–336.
- GOSSELIN, C. et ANGELES, J. (1988). The Optimum Kinematic Design of a Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 110(1):35–41.
- GOSSELIN, C. et ANGELES, J. (1989). The Optimum Kinematic Design of a Spherical Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 110(2):202–207.
- GOSSELIN, C. et GUILLOT, M. (1991). The Synthesis of Manipulators With Prescribed Workspace. *ASME Journal of Mechanical Design*, 113:451–455.
- GOSSELIN, C. et MARTIN, J. (1996). Determination of the Workspace of Planar Parallel Manipulators With Joint Limits. *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, 117(3):129–138.
- GOSSELIN, C., PIERRE, E. S. et GAGNÉ, M. (1996). On the Development of the Agile Eye. *IEEE Robotics and Automation*, 3(4):29–37.
- GOUGH, E. (1962). Universal tyre test machine. *In Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress*, pages 117–137.

- HAY, A. et SNYMAN, J. (2005). A Multi-Level Optimization Methodology for Determining the Dextrous Workspaces of Planar Parallel Manipulators. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30:422–427.
- HUNT, K. (1983). Structural Kinematics of In-Parallel-Actuated Robot Arms. *Journal of Mechanical Design*, 105(4):705–712.
- KOCK, S. et SCHUMACHER, W. (1998). Parallel x-y Manipulator With Actuation Redundancy for High-Speed and Active-Stiffness Applications. *In Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 2295–2300.
- KONG, X. et GOSSELIN, C. (2004). Type Synthesis of Three-Degree-of-Freedom Spherical Parallel Manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 23(3): 237–245.
- KUMAR, V. (1992). Characterization of Workspaces of Parallel Manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 114(3):368–375.
- MERLET, J.-P. (1996a). Direct Kinematics of Planar Parallel Manipulators. *In Proceedings 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 4, pages 3744–3749.
- MERLET, J.-P. (1996b). Redundant Parallel Manipulators. *Journal of Laboratory Robotics and Automation*, 8(1):17–24.
- MERLET, J.-P. (1997). *Les manipulateurs parallèles*. Paris : Éditions Hermes, 2e édition.

- MERLET, J.-P., GOSSELIN, C. et MOULY, N. (1998). Workspaces of Planar Parallel Manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 33(1-2):7–20.
- MURRAY, A. et HANCHAK, M. (2000). Kinematic Synthesis of Planar Platforms With RPR, PRR and RRR Chains. *Advances in Robot Kinematics*, pages 119–126.
- MYSZKA, D. (2005). *Machines and Mechanisms : Applied Kinematic Analysis*. Pearson Prentice Hall, 3e édition.
- NOKLEBY, S. (2005). Force-Moment Capabilities of Planar-Parallel Manipulators Using Different Redundant-Actuation Configurations. *Transactions of the CSME*, 29(4):669–672.
- NOKLEBY, S., FISHER, R., PODHORODESKI, R. et FIRMANI, F. (2005). Force Capabilities of Redundantly-Actuated Parallel Manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 40(5):578–599.
- PENNOCK, G. R. et KASSNER, D. J. (1993). The Workspace of a General Geometry Planar Three-Degree-of-Freedom Platform-Type Manipulator. *Journal of Mechanical Design*, 115(2):269–276.
- RASTEGER, J. et DERAVID, P. (1987a). The Effect of Joint Motion Constraints on the Workspace and Number of Configurations of Manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 22(5):401–409.

- RASTEGER, J. et DERAVID, P. (1987b). Methods to Determine Workspace, its Subspaces With Different Numbers of Configurations and all the Possible Configurations of a Manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 22(4):343–350.
- SEFRIQUI, J. et GOSSELIN, C. (1992). Singularity Analysis and Representation of Planar Parallel Manipulators. *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, 10(4):209–224.
- STEWART, D. (1965). A Platform With Six Degrees of Freedom. *Proceedings of the IMechE*, 180(15):371–385.
- WANG, J. et GOSSELIN, C. (2004). Kinematic Analysis and Design of Kinematically Redundant Parallel Mechanisms. *ASME Journal of Mechanical Design*, 126(1):109–118.
- ZANGANEH, K. et ANGELES, J. (1994). Instantaneous Kinematics and Design of a Novel Redundant Parallel Manipulator. *In Proceedings of IEEE Conference on Robotics and Automation*, pages 3043–3048.
- ZHAOHUI, L. et ZHONGHE, Y. (2004). Determination of Dexterous Workspace of Planar 3-DOF Parallel Manipulator by Auxiliary Linkages. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 17(supplement):76–78.

